Année Universitaire 2016-17

USMBA

Semestre S2

Professeur : Driss TOUIJAR

MODULE :

CALCUL DES PROBABILITÉS

Section : D

Avertissement

- Ce document est un support de Cours et non pas Le Cours.
- Par conséquent, votre présence aux séances du cours est indispensable pour mieux cerner le programme du Calcul des Probabilités...

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

" Comment oser parler des lois du hasard ? Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi ? "

(joseph Bertrand);

- # Un peu d'histoire

- Les premiers jeux de hasard marquent le début de l'histoire des probabilités .

- Selon Kendall (1956), l'origine du mot «hasard » serait dérivé du mot arabe « al zahr » (le Dé) et aurait été rapporté en Europe lors de la 3ème croisade. 

- C'est en France, avec Pascal(1623-1662) et Fermat(1601-1665) que la théorie des probabilités va prendre forme.

- Statistique et probabilités
- La statistique et les probabilités sont les deux aspects complémentaires de l'étude des phénomènes aléatoires. Ils sont cependant de natures bien différentes.
- Les probabilités peuvent être envisagées comme une branche des mathématiques pures, basée sur la théorie de la mesure, abstraite et complètement déconnectée de la réalité.
- Les probabilités appliquées proposent des modèles probabilistes du comportement de phénomènes aléatoires concrets. On peut alors, avant toute expérience , faire des prévisions sur ce qui va se produire.

- Par exemple, on peut modéliser la durée de bon fonctionnement d'un système par une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ
- on dira alors que la probabilité que le système ne soit pas encore tombé en panne à la date t est

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

- la démarche probabiliste suppose (ce qui n'est pas vraie dans la pratique) que la nature du hasard est connue. Cela signifie que l'on adopte un modèle probabiliste particulier (ici la loi exponentielle), qui permettra d'effectuer des prévisions sur les observations futures.

- Utilité des méthodes statistiques
- La statistique est l’ensemble des méthodes et techniques utilisées dans le but d’extraire de l’information de données. Ces données peuvent être issues de l’observation de phénomènes naturels (météorologie,…) ou d’enquêtes socio-économiques
- Dans la plupart des cas, les données sont entachées d’incertitudes et présentent des variations pour plusieurs raisons :
- le résultat des expériences effectuées n’est pas prévisible à l’avance avec certitude
- toute mesure est entachée d’erreur
- une enquête est faite sur quelques individus et on doit extrapoler les conclusions de l’étude à toute une population. etc…

- Il y a donc intervention du hasard et des probabilités. L'objectif essentiel de la statistique est de maîtriser au mieux cette incertitude pour extraire des informations utiles des données, via l'analyse des variations dans les observations.
- Les méthodes statistiques sont utilisées dans de très nombreux domaines. Citons quelques exemples :
- économie : prévisions économétriques, études quantitatives de marchés
- politique : sondages d'opinion
- agriculture : rendement des cultures,…
- ingénierie : contrôle de qualité des procédés de fabrication, sûreté de fonctionnement (fiabilité, sécurité,…)
- etc.

PROGRAMME DE CETTE PARTIE 1

Chapitre 1: Analyse combinatoire

Chapitre 2: Notion de probabilité

Chapitre 3: Variable Aléatoire

Chapitre 4: Lois Classiques et Convergence

BIBLIOGRAPHIE

Titre	Auteurs
Méthodes statistiques	B. Grais
Introduction à la statistique	J.P Bélisle ;J. Desrosiers
Introduction à la Méthode statistique	B. Goldfabr et C.Pardoux
Méthodes statistiques I	A. Vogt
Statistique et Probabilités	J.P. Lecoutre (T.D.)

Chapitre 1

Analyse combinatoire

analyse combinatoire
(combinatorial analysis, combinatorics)

- Branche des mathématiques qui étudie les « configurations », formées à partir d'« objets » pris dans un ensemble fini donné et disposés en respectant certaines contraintes ou certaines structures fixées. Les deux problèmes principaux sont l'énumération des configurations, et leur dénombrement
- Les dénombrements (arrangements, combinaisons, permutations) jouent un rôle important en *probabilités combinatoires, où l'hypothèse d'équiprobabilité ramène la détermination des* probabilités à des comptes d'évènements élémentaires. (dictionnaire deA-Z; F.Dress)

I)Notions sur les ensembles

1) Définitions

- **Définition 1 :** Ensemble

Toute collection d'individus, d'objets... deux à deux distincts est appelée un ensemble.

Exemples

$\mathbb{N}$:Ensemble des nombres entiers naturels,

$\mathbb{Z}$:Ensemble des nombres entiers relatifs,

$\mathbb{B} = \{0,1\}$:Ensemble des chiffres binaires, etc.

I) Notions sur les ensembles

1) Définitions

- **Définition 2 :** élément

Les individus ou objets x d'un ensemble E, pris isolément, sont des éléments de E, et on note :

$$x \in E$$

On désigne par la notation $x \notin E$, le fait que x n'est pas un élément de E.

Par exemple, le symbole 5 est un entier : $5 \in \mathbb{N}$.

I) Notions sur les ensembles

1) Définitions

- **Définition 3 :** L'ensemble vide

L'ensemble vide est celui qui n'admet aucun élément. Il est noté ϕ .

I)Notions sur les ensembles

1) Définitions

- **Définition 4 :** Partie d'un ensemble

Une partie A d'un ensemble E est un sous-ensemble de E.

Tous les éléments de A sont aussi des éléments de E.

On dit que A est inclus dans E, et on note $A \subset E$

I) Notions sur les ensembles

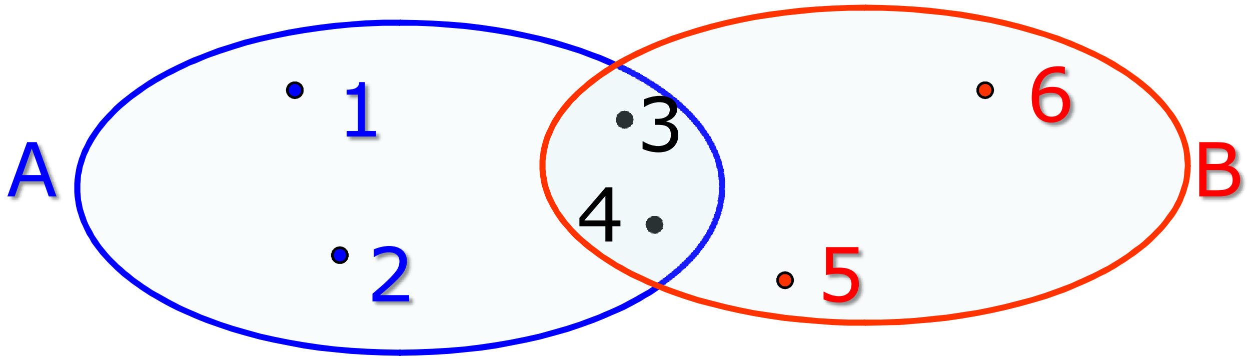
1) Définitions

Exemple :

Soit A = {1, 2, 3, 4} et B = {3, 4, 5, 6}

Alors $1 \in A \quad mais \quad 1 \notin B$

$A \subset \mathbb{N} \qquad B \subset \mathbb{N} \qquad A \not\subset B$



I) Notions sur les ensembles

1) Définitions

Remarque importante :

La paire $E = \{1, 2\}$ n'a pas les mêmes propriétés

que le couple $(1,2)$; en effet :

$$(1,2) \neq (2,1)$$

mais

$$E = \{1, 2\} = \{2,1\}$$

I) Notions sur les ensembles

1) Définitions

- **Définition4:** L'ensemble des Parties d'1ensemble

Les parties d'un ensemble E forment elles-mêmes un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$, où E est à la fois un ensemble et un élément car $E \in \mathcal{P}(E)$

Exemples

E = {1, 3, 4}

$$\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}, E\}$$

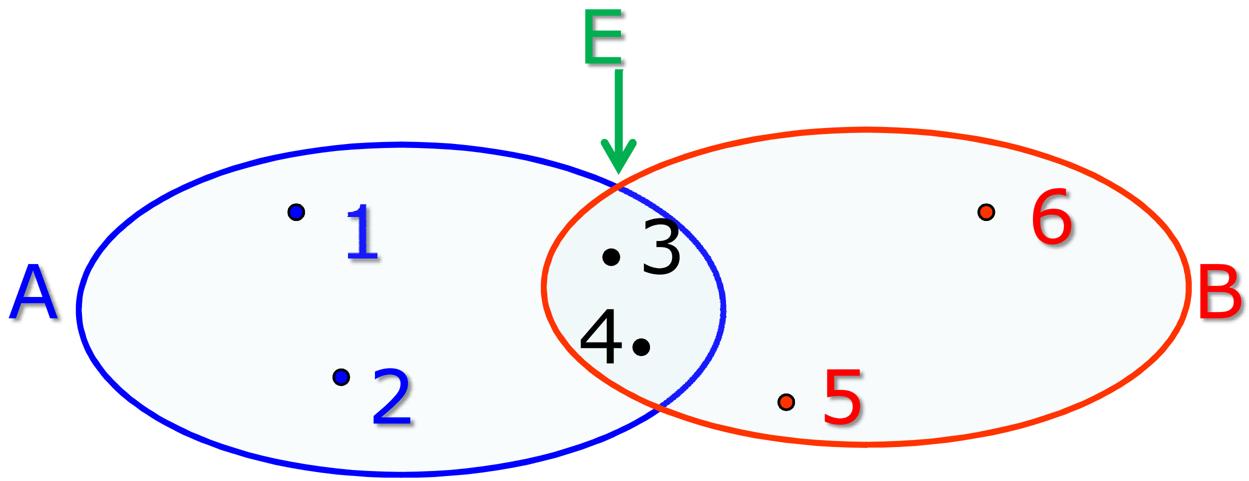
2) Operations sur les ensembles : Intersection

- **Définition 1 :**

Soient A et B deux ensembles et E un ensemble formé des éléments en communs entre A et B.
E est alors appelé l'intersection de A et B et est noté : $E = A \cap B$

Exemple

E = {3, 4}



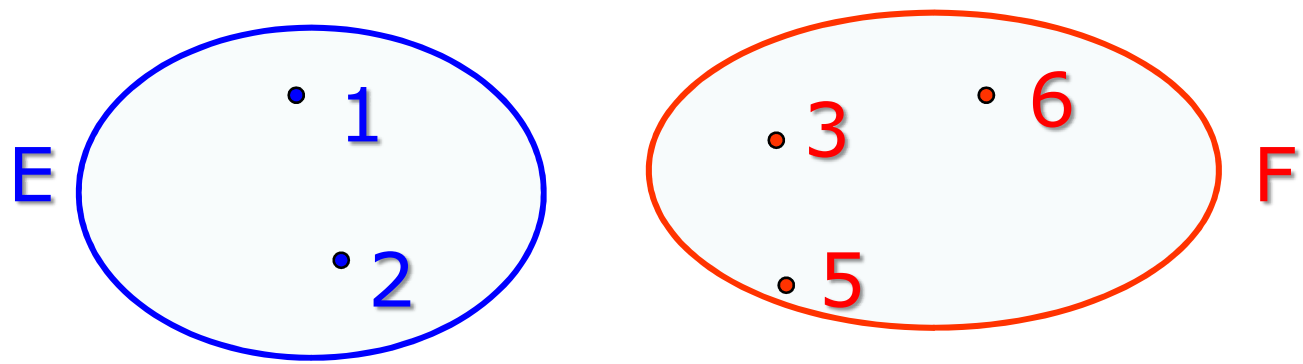
2) Operations sur les ensembles : Intersection

- **Définition 2 :**

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont disjoints si leur intersection est vide :

$$E \cap F = \emptyset$$

Exemple



I) Notions sur les ensembles

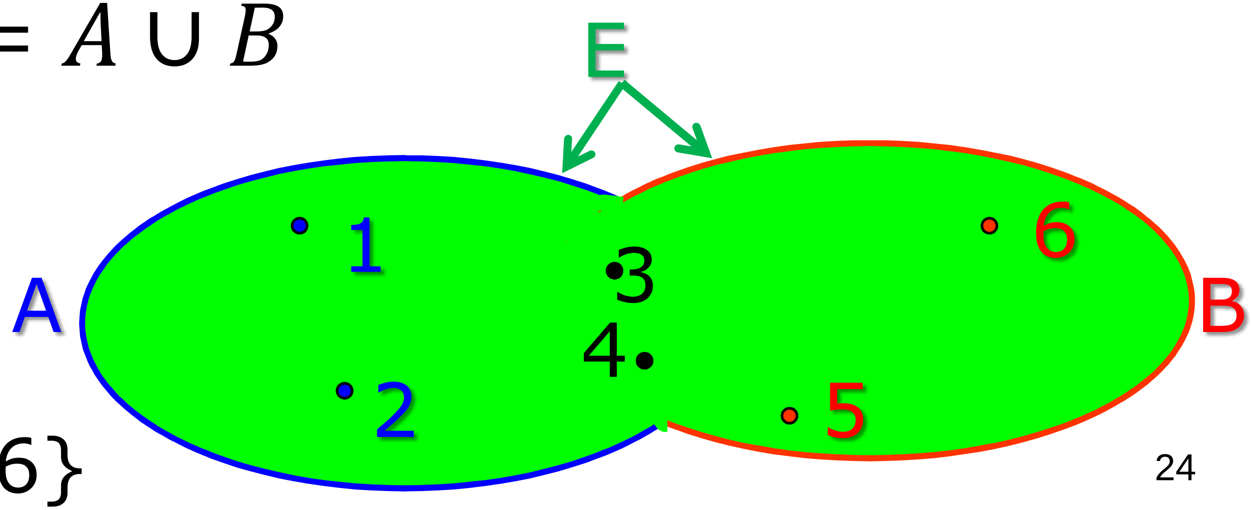
2) Operations sur les ensembles : Réunion

- **Définition 3 :**

Soient A et B deux ensembles et E un ensemble formé des éléments de A plus ceux de B et sans répéter les éléments en communs entre A et B. E est alors appelé réunion de A et B et est noté :

$$E = A \cup B$$

Exemple



E = {1,2,3,4,5,6}

I) Notions sur les ensembles

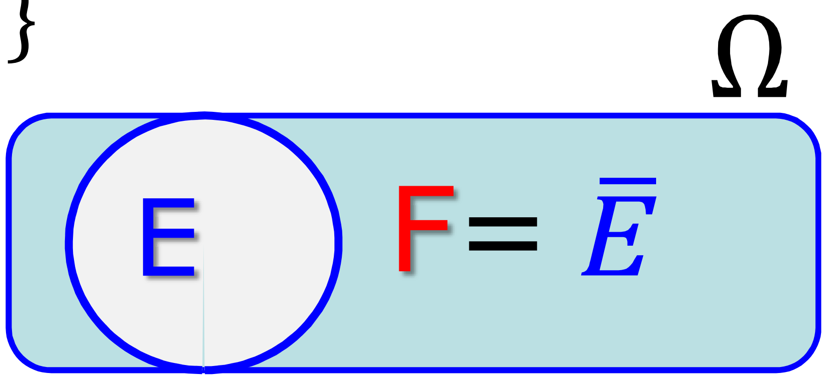
2) Operations sur les ensembles : Complémentaire

- **Définition 4 :** Le Complémentaire

Deux sous-ensembles $E, F \in \mathcal{P}(\Omega)$,où Ω est l'ensemble référence, sont complémentaires (par rapport à Ω) ssi : $E \cup F = \Omega \ et \ E \cap F = \emptyset$

On peut dans ce cas noté F par $\bar{E}$:

$$\bar{E} = \{x \in \Omega / \ x \notin E\}$$



On peut encore écrire :

$$\bar{\Omega} = \emptyset$$

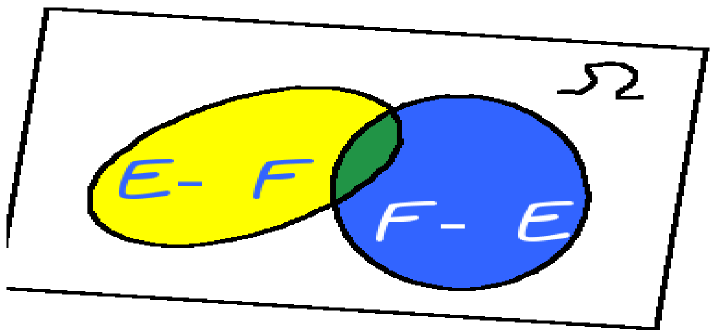
I) Notions sur les ensembles

2) Operations sur les ensembles : La Différence

- **Définition 5 :** Différence entre deux ensembles

La différence entre un sous-ensemble $E \in \mathcal{P}(\Omega)$et un autre sous-ensemble $F \in \mathcal{P}(\Omega)$, notée $E - F$ contient tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à F :

$$E - F = \{x \;/\; x \in E \; et \; x \notin F\} = E \cap \bar{F}$$



I) Notions sur les ensembles

2) Operations sur les ensembles :

- **Quelques propriétés principales**

$$E \cap \emptyset = \emptyset \ ; \ E \cup \emptyset = E \ ; \ E \cup E = E$$

$$Si \quad A \subset E \ alors \ A \cup E = E \ \ et \ \ A \cap E = A$$

$$A \cup (E \cap F) = (A \cup E) \cap (A \cup F)$$

$$A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup (A \cap F)$$

$$A = A \cap E + A \cap \bar{E}$$

$$\overline{A \cap E} = \bar{A} \cup \bar{E} \ \ et \ \ \overline{A \cup E} = \bar{A} \cap \bar{E}$$

$$A - B = A \cap \bar{B} = A - A \cap B$$

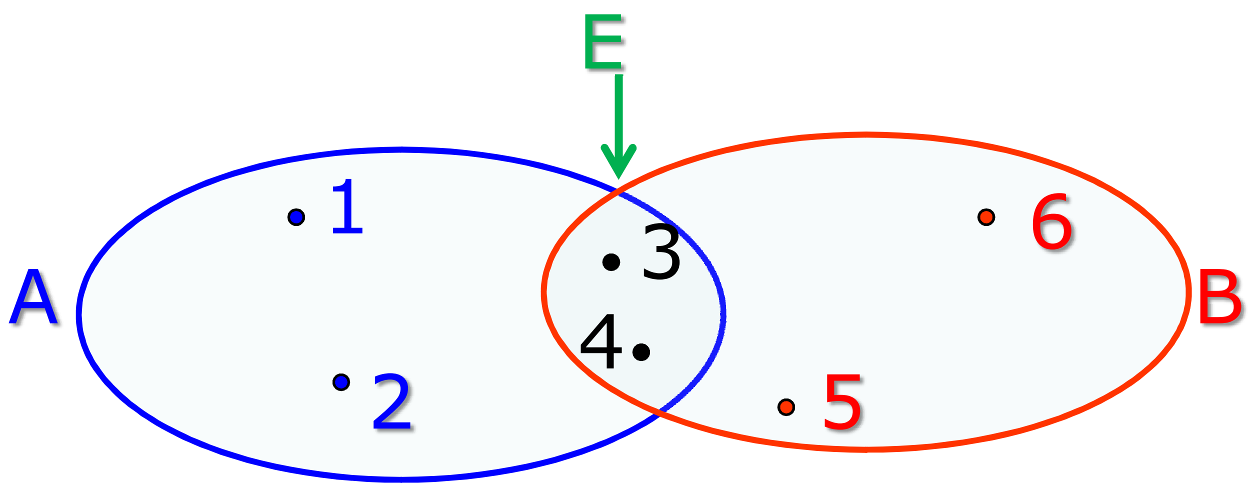
2) Operations sur les ensembles : La Différence

Quelques Exemples :

Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$

Alors

$$A - B = \{1, 2\}\ ,\ B - A = \{5, 6\}$$



I)Notions sur les ensembles

3) Ensemble dénombrable, Ensemble fini

- **Définition 1**

- Soit E et F deux ensembles. On dit que f une bijection de E dans F, si on peut mettre en correspondance parfaite les éléments de E avec ceux de F, c.à.d. si E et F ont autant d'éléments l'un que l'autre.

I) Notions sur les ensembles

3) Ensemble dénombrable , Ensemble fini

- **Définition 2**
- On dit que l'ensemble E est dénombrable s'il est fini ou s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E. Les éléments de E s'écrivent alors sous forme d'une suite infinie $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$

- **Exemples :**
- $\mathbb{N}^*$ est dénombrable (n → n+1 bijective)
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable
- Mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

I)Notions sur les ensembles

3) Ensemble dénombrable , Ensemble fini

- **Définition 3**
- On dit que l'ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel ***n*** et une bijection de $\{1,2,\ldots,n\}$dans E. Les éléments de E s'écrivent alors sous forme $\{e_1,\ldots,e_n\}$.

- **Remarques :**
- $Si\ E \neq \emptyset$, $\boldsymbol{n}$ est appelé le cardinal de E: $card(E) = n$
- On convient d'écrire : $card(\emptyset) = 0$
- Dénombrer un ensemble c'est déterminer son cardinal.

I)Notions sur les ensembles

4) Propriétés des Cardinaux

- **Proposition 1**
- Soit E un ensemble fini. Si F est un ensemble tel qu'il existe une bijection de E dans F, alors F est un ensemble fini et $Card\,\mathrm{E} = Card\,\mathrm{F}$

- **Proposition 2**
- Soit E un ensemble fini. Toute partie A de E est finie et $Card\,\mathrm{A} \leq Card\,\mathrm{E}$.
- Si A est une partie de E: $\mathrm{A}=\mathrm{E} \Leftrightarrow Card\,\mathrm{A} = Card\,\mathrm{E}$.

I) Notions sur les ensembles

4) Propriétés des Cardinaux

- **Proposition 3**

a) Soient AetB deux parties d'un ensemble E fini.
Si A et B sont disjointes ($A \cap B = \emptyset$), alors:

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

b) $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$

c) $card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$

d) $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(\cap B)$

e) Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une partition de E fini (i.e.$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

$et\ \forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2 tq\ i \neq j\ , A_i \cap A_j = \emptyset$) alors

$$card(E) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i)$$

I) Notions sur les ensembles

4) Propriétés des Cardinaux

- **Définition**

a) Soient E et F deux ensembles finis, où

E=$\{e_1, \dots, e_n\}$ $et\ \ F = \{f_1, \dots, f_p\}$. On appelle ensemble produit de E par F, noté $E \times F$, l'ensemble de tous les couples (e_i, f_j); $où$

$e_i \in E\ \ et\ \ f_j \in F$. On note :

$$E \times F = \{(e_i, f_j) |\ 1 \le i \le n\ ; 1 \le j \le p\}$$

Exemple : $\{2,5\} \times \{5\} = \{(2,5), (5,5)\}$

4) Propriétés des Cardinaux

- **Si on pose :**

$$E \times F = \cup_{i=1}^{n} A_i \ ; \text{où } A_i = \{(e_i, f_j) | \ 1 \leq j \leq p\}$$

$$\overset{prop\ 3}{\overbrace{\Rightarrow}} \quad card(E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{card(A_i)}_{=p} = np$$

Exemple : $card(\{2,5\} \times \{5\}) = np = 2 \times 1 = 2$

I) Notions sur les ensembles

4) Propriétés des Cardinaux

- **Proposition 4 :**
- Soient E et F deux ensembles finis :

$$card(E \times F) = card(E) \times card(F)$$

Remarques :

$$card(E^2) = card(E \times E) = (card(E))^2$$

$$card\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^{card\,(E)}$$

II) p-listes

- **1) Définition :**

  Soit p un entier naturel non nul. On appelle ***p-liste*** d'un ensemble E à n éléments, une liste ordonnée de p éléments de E (avec répétition possible).

Remarques :

- Une *p-liste* est un élément de E^p
- Une *p-liste* est aussi appelée p-uplet

Exemple

Soit $E=\{0,2,3,5\}$:

$(0,2,3)$ et $(5,3,3)$ sont deux 3-listes de E

$(0,2,3)$ et $(2,0,3)$ sont deux 3-listes différentes

II) p-listes

- **1) Définition :**

  Soit p un entier naturel non nul. Le nombre de ***p-listes*** d'éléments de E à n éléments est égal à n^p.

Preuve :

1) nb de p-listes est égal à (prop 4):

$$card(E^p) = (card(E))^p = n^p$$

III) Arrangements

- **1) Définition :**

  Soit p un entier naturel non nul et $p \leq n$.
  On appelle ***arrangement*** de p éléments de E, une ***p-liste*** d'éléments distincts de E.

- **2) Nombre d'Arrangements :**

  Soit E un ensemble à n éléments et A_n^p le nombre de ***p-liste*** d'éléments distincts de E.

  On a :

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple : E=$\{0,2,3,5,7\}$

$$(0,2,3)\ est\ un\ arrangement\ mais\ pas (5,3,3)$$

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

IV) Permutations

- **1) Définition :**

Soit E un ensemble à n éléments .
On appelle permutation de E tout ***arrangement*** de n éléments de E.

- **2) Nombre de permutations :**

Le nombre de permutations de E est : $n!$

$$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

- **Exercice 1 :**

Combien de façons a-t-on pour composer le mot de passe d'un fichier électronique de 6 chiffres?

Réponse: On a (10^6 = 1 million) façons de le composer.

- **Exercice 2 :**

Combien de façons a-t-on pour composer le mot de passe d'un fichier électronique de 6 chiffres différents?

Réponse: On a ($A_{10}^{6} = \dfrac{10\,!}{4\,!} = 151200$) façons de le composer.

V) Combinaisons

- **1) Définition :**

  Soit p un entier naturel non nul et $p \leq n$.
  On appelle ***combinaison*** de p éléments de E, un ***sous-ensemble*** de p éléments distincts de E.

Exemple : Soit E=$\{0,2,5\}$, on peut alors constituer :

- Une combinaison de 3 éléments : $\{0,2,5\}$

- Six arrangements de 3 éléments :

$$(0,2,5); (0,5,2); (2,0,5); (2,5,0); (5,2,0); (5,0,2)$$

Remarques :

- $0 \leq p \leq Card\ E$
- L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.
- $\{0,2,5\} = \{0,5,2\}$
- $\{0,5,5\}$ n'est pas une combinaison.

V) *COMBINAISONS*

- **2) Nombre de combinaisons**

  Le nombre de combinaison de p éléments de E, noté C_n^p est égal à :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

$$= \frac{A_n^p}{p!}$$

Remarque :

C_n^p est aussi appelé coefficient binomial

Dém : Il y a C_n^p façons de choisir une combinaison de p éléments de E. Et pour chacune d'elles il y a p! permutations de ses éléments. Par conséquent

$$A_n^p = p! C_n^p$$

Exemple :

$$C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

V) *COMBINAISONS*

- **3) Propriétés des coefficients C_n^p**

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \; ; où \;\; n \geq 0.$$

$$C_n^p = C_n^{n-p} \; ; où \;\; 0 \leq p \leq n.$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n \; ; où \;\; n > 0.$$

$$C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} ; où \;\; 1 \leq p \leq n-1 \, et \;\; n > 0$$

- Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \ ; \text{où} \ (a,b) \in R^2 \ et \ n \in N$$

- **Remarque** :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

-

- Formule du triangle de Pascal

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \ ; \text{où} \ 1 \le p \le n-1$$

VI. MODELE FONDAMENTAL : CAS D'URNE

- Supposons qu'une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On désire tirer p boules parmi les n dans l'urne.
- On peut envisager différents modes de tirages:

•1 Tirages successifs avec remise

✓Consiste à tirer au hasard dans l'urne une boule qui sera remise dans l'urne avant le tirage suivant. On aura ainsi formé une *p-liste*; où p est le nombre de tirages.

✓Autrement on aura n^p tirages avec remise (de p éléments) possibles.

VI. MODELE FONDAMENTAL : CAS D’URNE

- 2 Tirages successifs sans remise

✓Cette fois la boule tirée n’est pas remise dans l’urne qui contiendra ainsi à chaque tirage une boule de moins. On aura ainsi formé une p-liste d’éléments 2 à 2 distincts.

✓Autrement on aura A_n^p tirages sans remise.

VI. MODELE FONDAMENTAL : CAS D'URNE

•32 Tirages simultanés

✓On tire en même temps p boules dans l'urne ; donc sans remise et où l'ordre n'a pas d'importance. Un tel tirage est considéré comme une combinaison de **p** éléments parmi **n**.

✓Autrement on aura C_n^p tirages simultanés.

VII. En Résumé

Voici un tableau qui résume les 4 façons de tirer *p* objets parmi *n* :

Tirer	Avec ordre	Sans ordre
Avec remise	n^p	C_{n+p-1}^{p}
Sans remise	A_n^p	C_n^p

VII. En Résumé (suite)

Voici un tableau qui résume les 4 façons de placer *p* objets dans *n* boites :

Placer	Objets discernables	Objets indiscernables
Plusieurs dans 1 case	n^p	C_{n+p-1}^{p}
1 seul dans 1 case	A_n^p	C_n^p

Chapitre 2

Notion de probabilité

I. Introduction:

C'est en 1933 que le mathématicien russe Kolmogorov publia un article qui présentait les fameux axiomes à la base du calcul des probabilités.

Les probabilités devenaient alors un domaine des mathématiques à part entière comme la géométrie, l’algèbre ou encore l’analyse.

I. Introduction:

- Les concepts d'événement et de probabilité d'un événement sont deux notions intuitives.

- L'objectif de la théorie des probabilités est d'essayer de formaliser cette intuition dans un cadre mathématique, afin de comprendre les situations dans lesquelles le hasard intervient.

A)- Quelques définitions :

1)- Expérience aléatoire

On appelle une <u>expérience</u> ou <u>épreuve</u> aléatoire, toute expérience entraînant des résultats qui dépendent du hasard.

Exemple :

a) <u>Expérience 1</u> : On jette un dé à 6 faces et on lit le numéro de la face supérieure.

b) <u>Expérience 2</u> : On jette <u>deux fois</u> le dé et on note les deux numéros obtenus.

2)- Univers

On appelle <u>univers</u>, noté Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles (on dit aussi de toutes les éventualités possibles) de cette expérience.

- Dans le cas du lancé d'un dé :

$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

3)- Evénements

On définit un événement comme un ensemble de résultats possibles de l'expérience aléatoire.

Exemple :

a) Expérience 1 : A_1 est l'événement « le numéro obtenu est impair » : $A_1 = \{1 ; 3 ; 5\}$

A_2 l'événement « le numéro obtenu est inférieur ou égal à 3» : $A_2 = \{1 ; 2;3\}$

b) Expérience 2 : Soit B l'événement « la somme des deux numéros obtenus est 5 »:

$$B = \{(2;3),(1;4),(3;2),(4;1)\}$$

Remarques :

- Un événement est un sous-ensemble de Ω :

$$A \subset \Omega \Rightarrow A \in \mathscr{P}(\Omega)$$

- Ω est un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$. On l'appelle événement <u>*certain*</u>.
- $\varnothing$ est l'événement impossible.

- On appelle événement élémentaire tout élément ω de Ω :

1,2,5 et 6 sont des événements élémentaires de

$$\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$$

- L’univers Ω dépend de l’expérience considérée et aussi du choix de celui qui construit le modèle.

  - **Exemple** : pour le lancé d’un dé; on peut choisir :

$$\Omega = \{ impair \ ; \ pair \}$$

  - **Exemple** : pour la durée de vie d’une composante électronique; on peut choisir :

$$\Omega = [0 ; +\infty[$$

- En effectuant l'Expérience 1, on obtient un nombre ω tel que $\omega \in \Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$. Alors on dit que A_1 est réalisé si $\omega \in \{1\,;\,3\,;\,5\}$:

  A1 est réalisé $\Leftrightarrow \omega \in \{1\,;\,3\,;\,5\}$

  De même A_2 est réalisé $\Leftrightarrow \omega \in \{1\,;\,2;3\}$

  Ω est réalisé $\Leftrightarrow \omega \in \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$

- En effectuant l'Expérience 2, on obtient un couple (ω_1, ω_2). Alors on dit que B est réalisé si

$$(\omega_1, \omega_2) \in \{(1;4),(2;3),(4;1),(3;2)\}$$

- B est réalisé $\Leftrightarrow (\omega_1, \omega_2) \in \{(1;4),(2;3),(4;1),(3;2)\}$

Langage des événements :

- On dit que l'événement contraire de A « non A » est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé :

$$\omega \in \bar{A} \Leftrightarrow \omega \notin A$$

- Exemple : Ω *et* $\varnothing$ sont contraires.

- On dit que l'événement « A et B » est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés au cours de la même expérience :

$$\omega \in "A\, et\, B" \Leftrightarrow \omega \in A\, et\, \omega \in B \Leftrightarrow \omega \in A \bigcap B$$

- On dit que A et B sont <u>disjoints(incompatibles</u>) s'ils ne peuvent se réalisés simultanément :

$$A \bigcap B = \varnothing$$

Exemple : Pour le jet d'un dé à six faces, les événements A=« avoir un nombre pair » et B=« avoir un nombre impair » sont disjoints

- On dit que l'événement « A ou B » est réalisé si et seulement si l'un deux au moins est réalisé :

$$\omega \in "A\, ou\, B" \Leftrightarrow \omega \in A\, ou\, \omega \in B \Leftrightarrow \omega \in A \bigcup B$$

- On dit que l'événement « A - B » est réalisé si et seulement si A est réalisé et B ne l'est pas :

$$\omega \in "A - B" \Leftrightarrow \omega \in A \; et \; \omega \notin B \Leftrightarrow \omega \in A \bigcap \overline{B}$$

- On dit que l'événement « A Δ B » est réalisé si et seulement si l'un deux seulement est réalisé

$$\omega \in "A \Delta B" \Leftrightarrow \omega \in \left(A - B\right) \bigcup \left(B - A\right)$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \left(A \bigcup B\right) - \left(A \bigcap B\right)$$

- A implique B si la réalisation de A entraîne celle de B $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B \quad et \; donc \; on \; dit \; que \;\; A \subset B$
- Une famille A_1 ,A_2 , …, A_p est dite système complet d'événements si :

$$\forall i \neq j, A_i \bigcap A_j = \varnothing \;\; et \;\; \bigcup_{j=1}^{p} A_j = \Omega$$

TABLEAU RECAPULATIF

Liens entre ensembles et probabilités

ω	point de Ω	événement élémentaire
A	A sous-ensemble de Ω	événement aléatoire
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A est contenu dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
$\bar{A}$	complémentaire de A	contraire de A
$\emptyset$	Ø ensemble vide	événement impossible
Ω	Ω ensemble plein	événement certain
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

4)- Probabilité :

a) Définition 1: TRIBU

On dit que A est une tribu sur Ω, si c'est un ensemble de parties de Ω <u>stable</u> par intersection et par union et dénombrable.

Exemple :

$\mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, ***est une tribu sur Ω.***

le couple(Ω;*A*)est appelé <u>espace</u> <u>probabilisable</u>.

- $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ ***est un espace probabilisable,*** 4)- Probabilité :

Remarques :

- Tout élément de $\mathcal{A}$ est appelé événement.
- Tout singleton $\{\omega\}$ de Ω est appelé événement élémentaire.
- Dorénavant on considérera la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$.

b) Définition axiomatique de la probabilité : Soit $(\Omega\,;\mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable; on appelle probabilité sur Ω, toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans [0;1] vérifiant :

- P $(\Omega)=1$
- Pour tout A et B de $\mathscr{P}(\Omega)$ disjoints, on a :

$$P\left(A \bigcup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$$

- Le triplet $(\Omega\,;\mathscr{P}(\Omega)$; P) est appelé espace probabilisé
- P(A) est appelé probabilité de l'événement A.

b) Propriétés

Théorème

$\rightarrow \forall A \text{ événement}, \text{on a } 0 \leq P(A) \leq 1$

$\rightarrow P(\varnothing) = 0$

$\rightarrow \forall A \text{ événement}, \text{on a } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$\rightarrow \text{Si } A \subset B, \text{ alors } P(A) \leq P(B)$

$\rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ ; \text{ pour toute}$

$\text{famille d'événements disjoints } 2 \text{ à } 2$

$\rightarrow \text{Si } A \text{ et } B \text{ sont } 2 \text{ événements, alors on a}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\rightarrow \text{Pour tout système complet d'événements } A_1, A_2, \cdots, A_n, \text{et pour tout}$

$\text{événement } B, \text{on a } P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$

5)- Probabilité conditionnelle:

a) Définitions :

- Soit deux événements A et B où $P(B) \neq 0$, alors on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B que l'on note P(A/B), le rapport :

$$\boxed{P\left(A/_B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

- On dit que 2 événements A et B sont <u>indépendants</u> si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

b) Interprétation :

la Probabilité conditionnelle de A sachant B est la probabilité que l'événement A se réalise alors que l'événement B s'est déjà réalisé.

Si A et B sont **DISJOINTS** alors **P(A/B)=0**

Si A et B sont **INDÉPENDANTS** alors **P(A/B)=P(A)**

c) Propriété :

Soit deux événements A et B où $P(A) \neq 0 \; et \; P(B) \neq 0$

$$\boxed{P(A \cap B) = P\left(A/B\right) \times P(B) = P\left(B/A\right) \times P(A)}$$

d) Exemple:

Soit l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$

Soit P_1 et P_2 les probabilités définies sur $(\Omega ; \mathscr{P}(\Omega))$:

i	1	2	3	4	5	6
$P_1(\{i\})$	1/6	1/9	1/6	1/9	1/3	1/9

i	1	2	3	4	5	6
$P_2(\{i\})$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

A ={1,3} ; B ={3,5} sont-ils <u>indépendants</u> pour P_1

$$P_1(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad P_1(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$Et \ P_1(A \cap B) = P_1(\{3\}) = \frac{1}{6}$$

$$Or \quad P_1(A) \times P_1(B) = \frac{1}{6} \quad d\text{'}où\ l\text{'}égalité$$

d) Exemple:

Soit l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$

Soit P_1 et P_2 les probabilités définies sur $(\Omega ; \mathscr{P}(\Omega))$:

i	1	2	3	4	5	6
$P_1(\{i\})$	1/6	1/9	1/6	1/9	1/3	1/9

i	1	2	3	4	5	6
$P_2(\{i\})$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

A = {1,3} ; B = {3,5} sont-ils indépendants pour P_2

$$P_2(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad P_2(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$Et \ P_2(A \cap B) = P_2(\{3\}) = \frac{1}{6}$$

$$Or \quad P_2(A) \times P_2(B) = \frac{1}{9} \neq P_2(A \cap B)$$

d) Formule des probabilités totales:

Soit A_1 ,A_2 , …, A_n un système complet d’événements non impossibles. Pour tout B, on a

$$\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i\cap B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\times P\left({}^{B}\!/_{A_i}\right)}$$

e) Formule de Bayes :

Soit A_1 ,A_2 , …, A_n un système complet d’événements non impossibles et B non impossible. Pour tout j tel que $1\leq j\leq n$ on a :

$$\boxed{P\left({}^{A_j}\!/_{B}\right)=\frac{P(A_j)\times P\left({}^{B}\!/_{A_j}\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\times P\left({}^{B}\!/_{A_i}\right)}}$$

Bayes

6)- Notion d'Equiprobabilité :

a) Définitions :

i) Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \ldots , \omega_n\}$. On dit qu'il y a <u>équiprobabilité</u> si :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad P\left(\{\omega_i\}\right) = \frac{1}{n} = \frac{1}{Card\ \Omega}$$

Autrement, les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales.

b) Théorème :

Lorsque tous les événements <u>élémentaires</u> sont <u>équiprobables</u>; alors :

$$P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{nb\ de\ cas\ favorables}{nb\ de\ cas\ possibles}$$

6)- Notion d'Equiprobabilité :

Exemple :

On reconsidère l'Expérience 2 :

$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}^2$$

On considère que le dé est équilibré. Soit B l'événement « la somme des deux numéros obtenus est 5 », on aura :

$$B = \{(2;3),(1;4),(3;2),(4;1)\}$$

$$\forall (i, j) \in \Omega^2, \quad P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{6^2} \quad et \quad P(B) = \frac{Card\ B}{Card\ \Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Chapitre 3

Variables Aléatoires

I. Introduction:

Une variable aléatoire, notée V.A. n'est autre qu'une grandeur numérique attachée au résultat d'une expérience aléatoire. Chacune de ses valeurs est associée à une probabilité d'apparition.

Exemple:

- la somme des numéros affichés par le lancé de 2 dés.
- le nombre d'appels arrivés à 1 standard téléphonique pendant 1 minute
- la durée de vie d'1 composante électronique.

A)- définition :

On appelle variable aléatoire réelle, notée VAR, une application X définie sur l'univers Ω et à valeurs dans R qui associe à chaque résultat de l'épreuve aléatoire, un nombre réel :

$$X : \Omega \rightarrow R$$

$$\omega \mapsto X(\omega) = x$$

Remarques :

- ✓ Si X(Ω) est fini ou dénombrable, X est dite V.A. discrète (VAD)
- ✓ X est dite V.A. continue (VAC) si X(Ω) est une réunion d'intervalles de R.
- ✓ Désormais, on note **X=x** à la place de **X(ω)=x**

B)- Fonction de Répartition :

Définition :

On définit la Fonction de Répartition F d'1variable aléatoire X comme étant la fonction :

$$F : R \to [0;1]$$

$$x \mapsto F(x) = P(X \leq x)$$

Remarque :

- ✓ F nous permet de définir la loi de probabilité de X

B)- Fonction de Répartition :

Propriétés de la Fonction de Répartition

$$\rightarrow \forall x \in R, \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$\rightarrow F \text{ est croissante car si } x < y \Rightarrow (X \leq x) \subset (X \leq y)$$

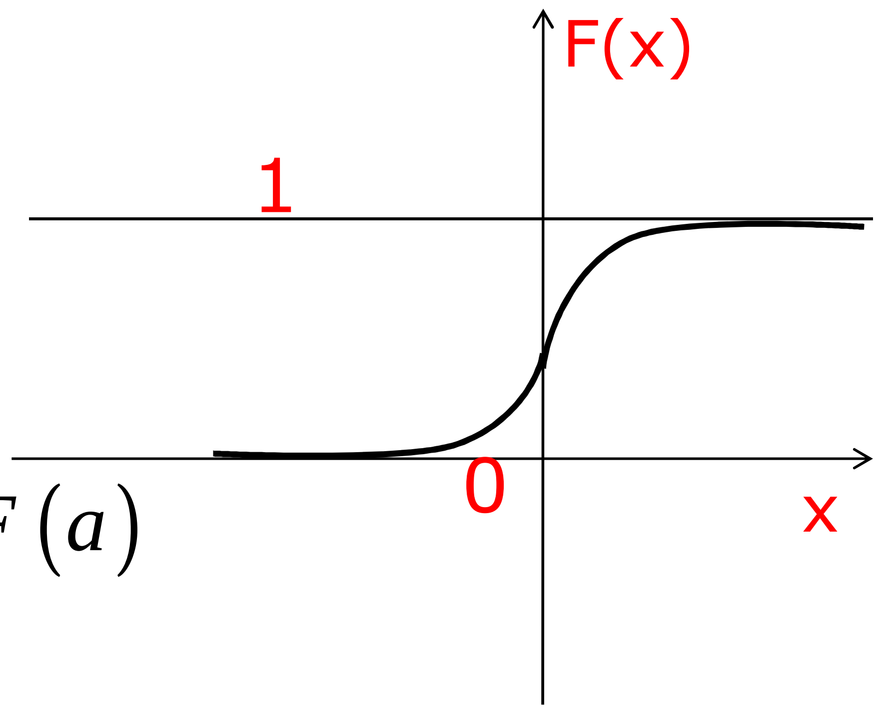
$$\text{donc } F(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F(y)$$

$$\rightarrow \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$\rightarrow \forall a \text{ et } b \in R, \text{tel que } a < b :$$

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$$



B)- VAD :

Loi de Probabilité :

On appelle Loi de Probabilité d'1variable aléatoire discrète, la donnée, pour chaque valeur x_i prise par X, de la Probabilité de l'événement (X= x_i), notée p_i : $P(X = x_i) = p_i$.

Remarque :

- ✓ Si X(Ω) est fini $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- ✓ Si X(Ω) est dénombrable infini $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$

Exemple: On lance deux pièces de monnaie. Soit l'univers $\Omega = \{(p,p) ; (p,f) ; (f,p) ; (f,f)\}$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ Soit X la VA qui vaut 0 si on obtient (p,p), 1 si on obtient (p,f) ou (f,p) et 2 si on obtient (f,f).

On a : $X(\Omega)=\{0,1,2\}$.

Soit P la probabilité définie sur $(\Omega ; \mathscr{P}(\Omega))$ par :

ω	(p,p)	(p,f)	(f,p)	(f,f)
$P(\{\omega\})$	1/4	1/4	1/4	1/4

puisque, en supposant que les 2 pièces sont équilibrées, les événements élémentaires sont équiprobables.

$\Rightarrow$

x_i	0	1	2
$p_i = P(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

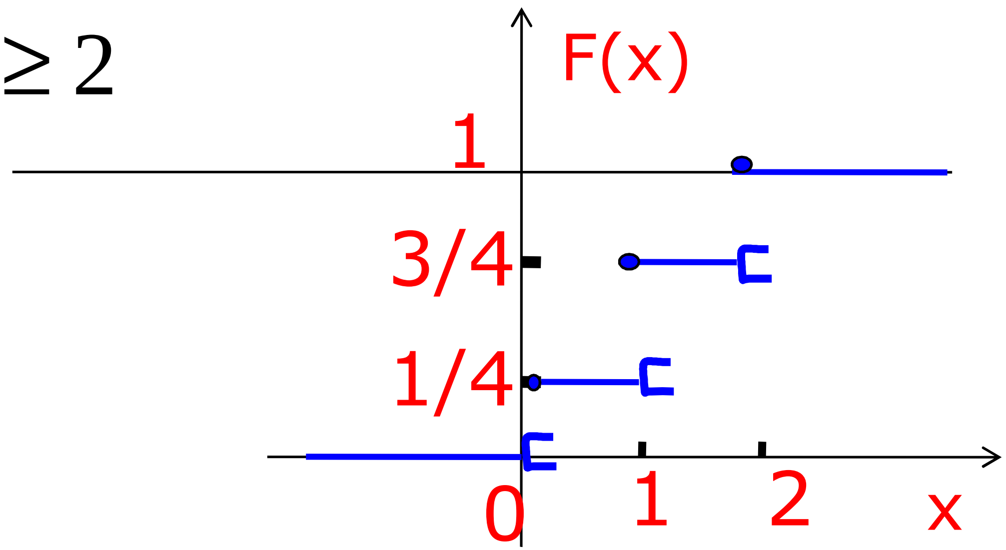
En effet $p_2 = P(\{X = 1\}) = P(\{\omega / X(\omega) = 1\}) = P(\{(f,p);(p,f)\})$

$$= P(\{(f,p)\}) + P(\{(p,f)\}) = 1/4 + 1/4 = \frac{1}{2}$$

Exemple :

la Fonction de Répartition dans notre cas :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{4} & si \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{3}{4} & si \quad 1 \le x < 2 \\ 1 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$



B)- VAD :

Espérance mathématique :

On appelle Espérance mathématique d’1variable aléatoire discrète, notée E(X), la quantité :

- ✓ Si X(Ω) est fini $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- ✓ Si X(Ω) est dénombrable infini $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i x_i$

Remarque :

- ✓ Cette notion correspond à la notion de moyenne arithmétique en Stat.Desc.
- ✓ Dans le cas dénombrable infini, la série doit être convergente pour que E(X) existe.
- ✓ X est dite centrée si <u>E(X)=0</u>

B)- VAD :

Propriétés de l'Espérance mathématique :

- ✓ L'Espérance mathématique est un opérateur linéaire: $Soient\ X\ et\ Y\ 2\ \text{V.A.}\ et\ \ a,b \in R, on\ a:$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

- ✓ Soit g une fonction de R dans R, alors :

$$E\left(g(X)\right)=\sum_i g(x_i)\,p_i$$

Remarque :

- ✓ Si $g(x)= x^3$

$$E\left(X^3\right)=\sum_i x_i^3 p_i$$

Exemple (suite) :

x_i	*0*	*1*	*2*
$p_i = P(X = x_i)$	***1/4***	***1/2***	***1/4***

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i$$

$$= (0 \times p_1 + 1 \times p_2 + 2 \times p_3)$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

et

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

B)- VAD :

Variance et Ecart-type :

On appelle Variance d'1variable aléatoire discrète, notée V(X), la quantité :

- ✓ Si X(Ω) est fini

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - E(X)\right)^2 p_i$$

- ✓ Si X(Ω) est dénombrable

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(x_i - E(X)\right)^2 p_i$$

où $E(X) = \sum_{i} x_i p_i$

Remarque :

- ✓ Dans le cas dénombrable, les séries $\sum_{i}^{+\infty} x_i p_i$ et $\sum_{i}^{+\infty} x_i^2 p_i$ doivent être convergentes pour que E(X) et E(X^2) existent.

B)- VAD :

Propriétés de la Variance :

$$\rightarrow V(X) \geq 0$$

$$\rightarrow V(X) = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \left[\sum_i x_i p_i\right]^2$$

$$\rightarrow En\ général\ :\ V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$$

$$\rightarrow V(a+X) = V(X)$$

$$\rightarrow V(aX) = a^2 V(X)$$

Exemple (suite) :

$$V(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \left[\sum_i x_i p_i\right]^2$$

$$= \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

x_i	*0*	*1*	*2*
$p_i = P(X = x_i)$	***1/4***	***1/2***	***1/4***

B)- VAD :

Ecart-type :

On appelle écart-type d'1variable aléatoire discrète, notée σ(X), la racine de la Variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque :

- ✓ $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

- ✓ $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est dite V.A. centrée réduite :

en effet $E(Z) = 0 \; et \; V(Z) = 1$.

C)- VAC à densité :

Ici X est telle que X(Ω) est un intervalle de R (ou R entier).

Densité de Probabilité :

On dit qu'une variable aléatoire X est à densité s'il existe une fonction f de R dans R définie, positive, continue sur R (sauf peut être en un nombre fini ou dénombrable, de réels), telle que pour tout réel x :

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \text{ ;où } F \text{ est la fonction de répartition de } X$$

La fonction f s'appelle <u>la densité de probabilité</u> de La VAC X.

C)- VAC à densité :

Théorème :

une fonction f réelle, définie sur R est une densité de probabilité si et seulement si :

a) f est continue sur R, sauf, éventuellement, en un nombre fini de réels;

b) Pour tout réel x, $f(x) \geq 0$;

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Si X une VAC admettant une densité f et soit F sa fonction de répartition, alors F est continue sur R et :

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Si X une VAC admettant une densité f : $P(X = x) = 0$

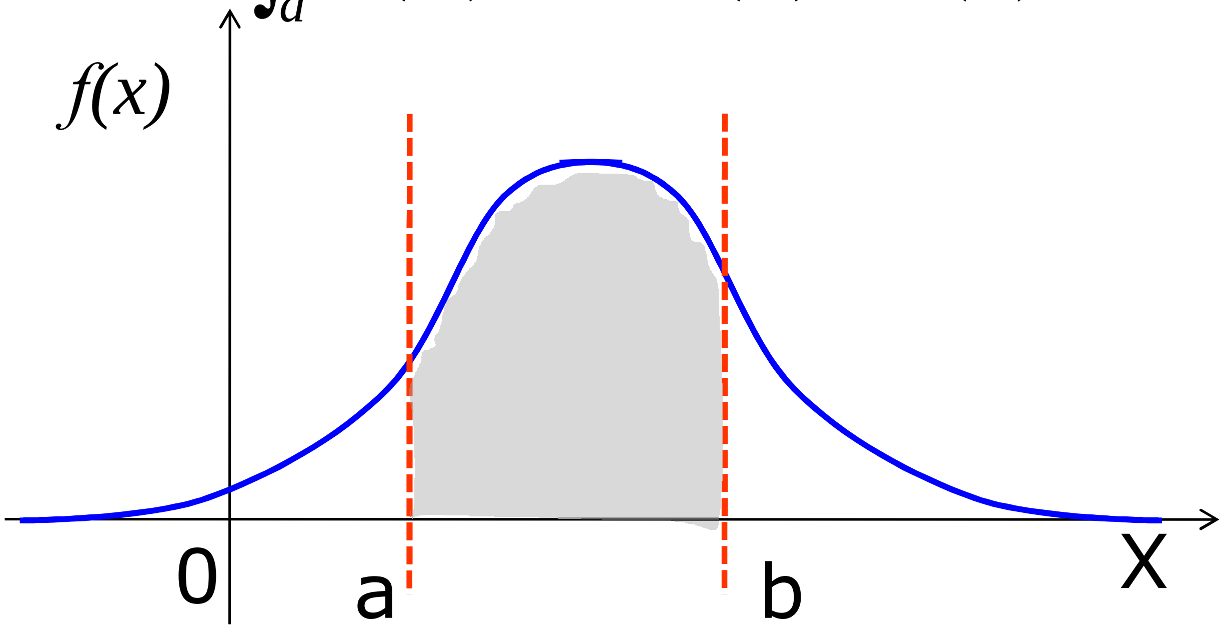
C)- VAC à densité :

Propriétés d'une densité de probabilité

Si X une VAC admettant une densité f et soit F sa fonction de répartition, alors :

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

$$= \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



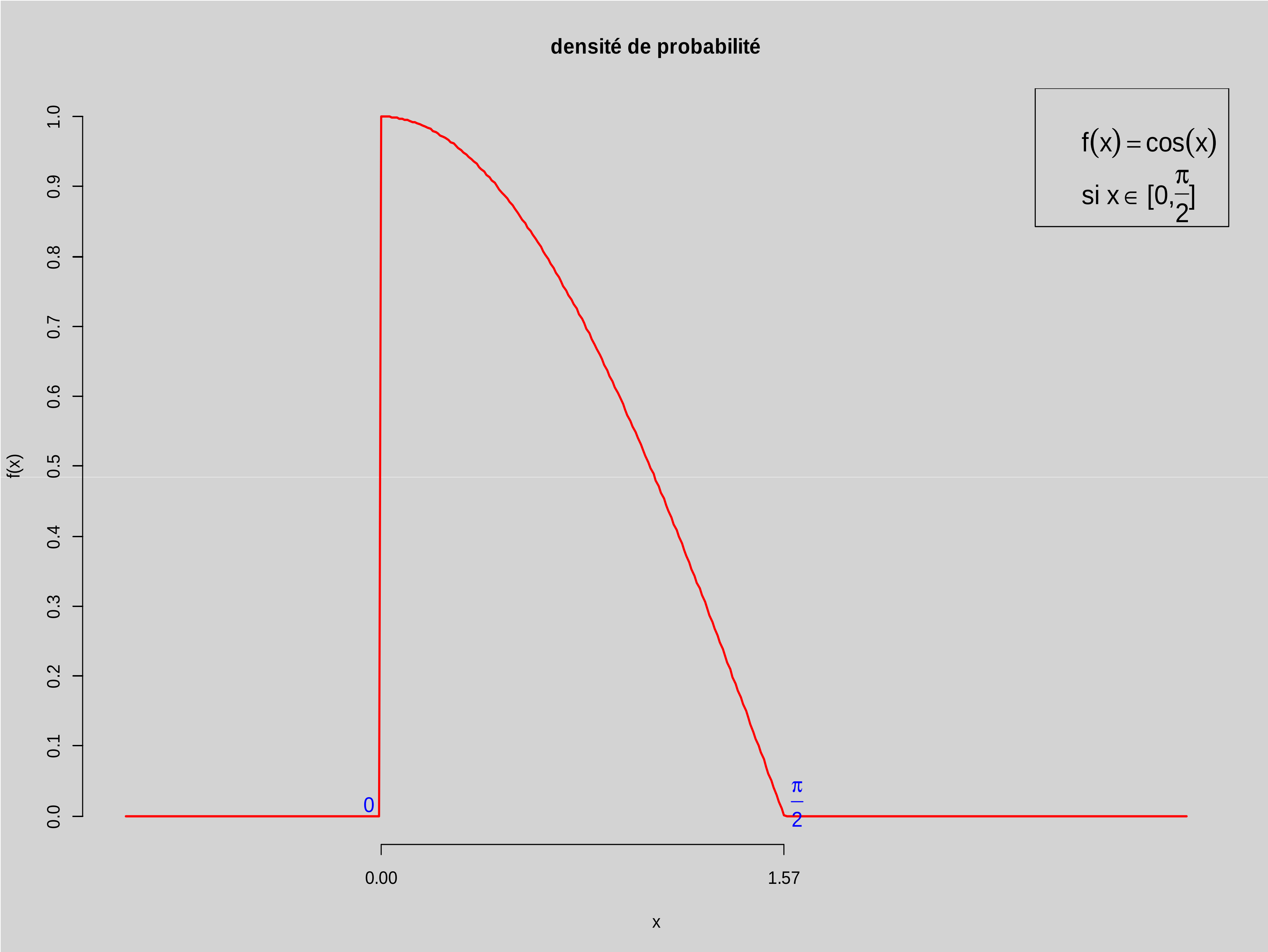
C)- VAC à densité :

Exemple:

Soit f la fonction définie sur R par :

$$f(x) = \begin{cases} = \cos x \quad si \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

- f est continue sur R\{0}
- $\forall x \in R,\ f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{=0} dx + \int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \underbrace{f(x)}_{\cos x} dx + \int_{+\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{0} dx = [\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1$
- D'où f est une densité de probabilité


densité de probabilité
f(x) = cos(x)
si x ∈ [0, π/2]
f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0
π/2
0.00
1.57
x

C)- VAC à densité :

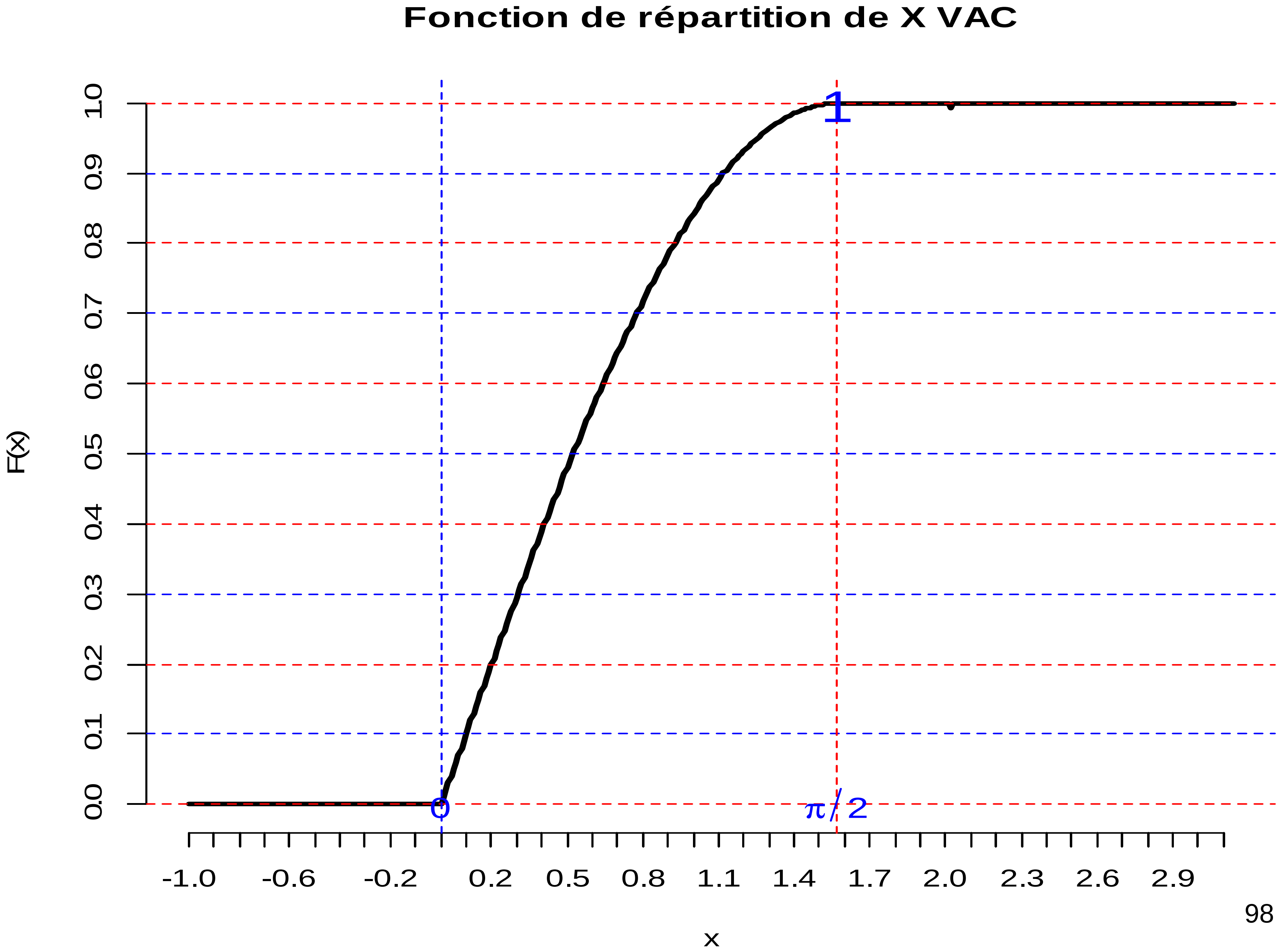
Exemple (suite) :

Soit F la fonction de répartition d'1 VAC X de densité f :

$$F(x)=\begin{cases} =0 \quad si \quad x\in\left]-\infty,0\right] \\ =\int_{-\infty}^{0}\underbrace{f(t)}_{=0}dt+\int_{0}^{x}\underbrace{f(t)}_{\cos t}dt=\sin x \quad si \quad x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right] \\ =\int_{-\infty}^{0}\underbrace{f(t)}_{=0}dt+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{f(t)}_{\cos t}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\underbrace{f(t)}_{0}dt=1 \quad si \quad x\in\left]\frac{\pi}{2},+\infty\right[\end{cases}$$

Par exemple, on peut calculer :

$$P\left(0\leq X\leq\frac{\pi}{4}\right)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}-0=\frac{\sqrt{2}}{2}$$


Fonction de répartition de X VAC
F(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1
0
π/2
-1.0
-0.6
-0.2
0.2
0.5
0.8
1.1
1.4
1.7
2.0
2.3
2.6
2.9
x

C)- VAC :

Espérance mathématique d'1 VA à densité :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Propriétés de l'Espérance mathématique :

$\rightarrow Soient\ X\ et\ Y\ \ 2\ \text{V.A.}C\ \ et\ \ a,b \in R\ ,on\ a:$

$E(aX + bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)$

$\rightarrow \text{Si}\ X\ \ \text{VAC de densité}\ f\ \ \text{admettant une espérance}$

$\text{et si}\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx\ est\ convergente, alors\ X^2\ admet$

$une\ espérance\ et\ E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

C)- VAC :

Variance d'une V.A. à densité:

On appelle Variance d'1variable aléatoire X de densité f, notée V(X), la quantité réelle :

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)\,dx$$

$quand\ E(X)\ et\ E\left(X^2\right)\ existent.$

Propriétés de l'Espérance mathématique :

$\rightarrow V(X) \geq 0$

$\rightarrow V(X) = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\right)^2$

$\rightarrow En\ général\ :\ V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$

$\rightarrow V(a+X) = V(X)$

$\rightarrow V(aX) = a^2 V(X)$

C)- VAC :

Ecart-type :

On appelle écart-type d'1 VAC, notée σ(X), la racine de la Variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque :

- ✓ $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

- ✓ $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est dite V.A. centrée réduite :

en effet $E(Z) = 0 \; et \; V(Z) = 1$.

C)- VAC à densité :

Exemple (suite) :

- Calcul de L'espérance E(X) :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$

$$=\left[x\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{+\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1$$

Exemple (suite) : Calcul de La variance V(X) :

$$V(X) = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2 = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2$$

$$Or$$

$$E\left[X^2\right] = \left[x^2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{+\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \frac{\pi^2}{4} + 2\left(\underbrace{\left[x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\left(\underbrace{\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{1}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$D'où$$

$$V(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = \pi - 3$$

D)- COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES :

LOI CONJOINTE :

Soient X et Y 2 VAD définies sur le même espace probabilisé $(\Omega\,;\mathscr{P}(\Omega)\,;\,P)$. On appelle couple de V.A. réelles, une application :

$$\Omega \to R^2$$

$$\omega \mapsto \left(X(\omega)\,;Y(\omega)\right)$$

Supposons que $X(\Omega)=\{x_i, i\in I\}$ *et* $Y(\Omega)=\{y_j, j\in J\}$

On appelle loi conjointe du couple (X,Y) l'ensemble des triplets (x_i , y_j , p_{ij}) où

$$p_{ij} = P\left[\left(X = x_i\right)\cap\left(Y = y_j\right)\right]$$

Les p_{ij} Sont des probabilités qui vérifient :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_{ij} = 1$$

On appelle Tableau de contingence (ou à double entrée), le tableau suivant :

1-TABLEAU DE CONTINGENCE

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_k	TOTAL
x_1	p_{11}	p_{12}				p_{1k}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}				p_{2k}	$p_{2.}$
$\vdots$							$\vdots$
x_i				p_{ij}			$p_{i.}$
$\vdots$							$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}				p_{mk}	$p_{m.}$
TOTAL	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$\cdots$	$p_{.j}$	$\cdots$	$p_{.k}$	1

D)- COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES :

LOI MARGINALE :

On appelle <u>loi marginale</u> de X (resp^t Y) du couple (X,Y), la loi de probabilité de X (resp^t Y)

$$p_{i\bullet} = P\left[\left(X = x_i\right)\right] = \sum_{j=1}^{k} P\left[\left(X = x_i\right) \cap \left(Y = y_j\right)\right] = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}$$

$$p_{\bullet j} = P\left[\left(Y = y_j\right)\right] = \sum_{i=1}^{m} P\left[\left(X = x_i\right) \cap \left(Y = y_j\right)\right] = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$$

D)- COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES :

Exemple:

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remises, et on note X et Y les numéros obtenus.

Soit Z=Sup(X,Y) et P probabilité <u>uniforme</u> sur $(\Omega\,;\mathscr{P}(\Omega))$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$$

Le tableau suivant donnent les lois de (X,Y) et (X,Z)

X \ Y	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	1/16	1/16	1/16	1/16
3	1/16	1/16	1/16	1/16
4	1/16	1/16	1/16	1/16

Loi de (X,Y)

Loi de (X,Z)

X \ Z	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	0	2/16	1/16	1/16
3	0	0	3/16	1/16
4	0	0	0	4/16

Exemple (suite) :

Démo :

$$\forall (i,j) \in \Omega, \ on\ a : P\left[(X=i) \cap (Y=j) \right] = \frac{1}{16}$$

$$et$$

$$\begin{cases} si \quad i<j \quad P\left[(X=i) \cap (Z=j) \right] = P\left[(X=i) \cap (Y=j) \right] = \frac{1}{16} \\ si \quad i>j \quad P\left[(X=i) \cap (Z=j) \right] = P(\varnothing) = 0 \\ si \quad i=j \quad P\left[(X=i) \cap (Z=i) \right] = \sum_{k=1}^{i} P\left[(X=i) \cap (Y=k) \right] = \frac{i}{16} \end{cases}$$

Exemple (suite) :

X \ Z	**1**	**2**	**3**	**4**	$p_{i\bullet}$
1	1/16	1/16	1/16	1/16	**4/16**
2	0	2/16	1/16	1/16	**4/16**
3	0	0	3/16	1/16	**4/16**
4	0	0	0	4/16	**4/16**
$p_{\bullet j}$	**1/16**	**3/16**	**5/16**	**7/16**	1

Loi marginale de X

Loi marginale de Z

D)- COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES :

Indépendance des variables aléatoires X et Y:

On dit que X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x_i, y_j)$$

$$P\left[(X = x_i) \cap (Y = y_j)\right] = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

Propriétés

$$Soient\ X\ et\ Y\ \ 2\ \text{V.A.}\ indépendantes, on\ a:$$

$$\rightarrow E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$$

$$\rightarrow V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Exemple (suite) :

$$E(X \times Z) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} i \times j \times p_{ij}$$

$$= \frac{1+2+3+4+8+6+8+27+12+64}{16} = \frac{135}{16}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} i \times p_{i\bullet} = \frac{4+8+12+16}{16} = 2,5$$

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{4} j \times p_{\bullet j} = \frac{1+6+15+28}{16} = 3,12$$

$$\rightarrow E(X \times Z) \neq E(X) \times E(Z)$$

Donc X et Z sont dépendantes

D)- COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES :

COVARIANCE DE 2 VARIABLES ALEATOIRES ET LEUR COEFFICIENT DE VCORRELATION :

On définit la covariance de X et Y par :

$$\boxed{\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} \left(x_i - E(X)\right)\left(y_j - E(Y)\right) \end{aligned}}$$

D)- COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES :

COVARIANCE DE 2 VARIABLES ALEATOIRES ET LEUR COEFFICIENT DE CORRELATION :

Propriétés

$$\rightarrow Cov(X,Y) = E(X \times Y) - E(X) \times E(Y)$$

$$\rightarrow Cov(X,X) = V(X)$$

$$\rightarrow Si\ X\ et\ Y\ sont\ indépendantes, alors\ \mathrm{cov}(X,Y) = 0$$

$$\rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

D)- COUPLE DE VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES :

COEFFICIENT DE CORRELATION LINEAIRE :

On définit le coefficient de corrélation r de X et Y par :

$$\boxed{r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}}$$

Propriétés

- r a le même signe que la cov(X,Y).
- $-1 \leq r \leq +1$
- Si X et Y sont indépendantes, alors r=0.
- $r = \pm 1$ ssi P(Y=aX+b)=1

Chapitre 4

Lois Classiques et Convergence

INTRODUCTION

- La pratique des probabilités dans la modélisation statistique passe très souvent par une parfaite connaissance des lois usuelles ; le probabiliste-statisticien a en effet besoin :

- - d'identifier la ou les lois de probabilité des variables engendrant les données observées

- -de connaître et interpréter leurs caractéristiques fondamentales (espérance, écart-type, médiane, etc...) qui interviennent dans l'expression des densités ou de fonctions de répartition

- - de pouvoir approximer ces lois par des comportements asymptotiques limites apparaissant dans un certain nombre de situations.

I. LOIS DISCRETES USUELLES :

1- LOI UNIFORME SUR {1,…,n}

Une V.A.D. X suit une loi uniforme sur {1,…,n}si:

$$\boxed{X(\Omega)=\{1,\ldots,n\} \quad et \quad \forall k\in\{1,\ldots,n\},\ P(X=k)=\frac{1}{n}}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\{1,\ldots,n\})$

Moments :

- **Espérance:** $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} i\ p_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}}$
- **Variance:** $\boxed{V(X)=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=\frac{n^2-1}{12}}$

I. **LOIS DISCRETES USUELLES** :

1- LOI UNIFORME SUR {1,…,n}

DOMAINES ET LIMITATIONS :

Elle est souvent utilisée pour générer des nombres aux hasard et elle est souvent à la base de la simulation de n’importe quelle loi de probabilité discrète ou continue.

(voir touche RND de la calculatrice)

2- LOI DE BERNOULLI $\mathscr{B}(p)$

A)- définition : Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si sa fonction de probabilité est de la forme

$$\boxed{X = \begin{cases} 1 \text{ avec probabilité } & p \\ 0 \text{ avec probabilité } & q = 1 - p \end{cases}}$$

où p et q représentent respectivement les probabilités de succès et d'échec symbolisés par les valeurs 1 et 0. On écrit :

$$\boxed{P(X = x) = p^x q^{1-x} \quad ; \quad x \in \{0, 1\}}$$

On note: $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$

B)- Moments :

- **Espérance:**

L'espérance mathématique de la loi de Bernoulli est le paramètre p de la loi:

$$\boxed{E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = p}$$

- **Variance :**

La variance de la loi de Bernoulli est pq :

$$V(X) = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2 = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 p_i - [p]^2$$

$$= 0 + 1 \times p - p^2 = p(1-p) = pq$$

C) DOMAINES ET LIMITATIONS

La loi de Bernoulli est utilisée lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux résultats possibles quali. Ou quanti

Jakob Bernoulli

3- LOI BINOMIALE $\mathscr{B}(n, p)$

On appelle processus de Bernoulli toute modélisation par une suite $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ de V.A. i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées), chacune de loi $\mathscr{B}$(p). Dans ce cas, on peut citer différents types de comptages, menant à des lois différentes:

- loi binomiale : comptage des succès en s'arrêtant à un nombre de répétitions fixé à l'avance.
- loi géométrique : comptage des échecs avant d'atteindre le premier succès.
- loi binomiale négative : comptage des échecs avant d'atteindre le r-ième succès ().
- loi de poisson : comptage de nb d'occurrences dans un laps de temps

3- LOI BINOMIALE $\mathscr{B}(n, p)$

La loi binomiale dépend de deux paramètres n et p, et dont les valeurs possibles sont: X(Ω)= {0, 1, 2, · · · , n}

Soit $\mathbb{P}(X = x)$ la probabilité d'obtenir x succès parmi n répétitions.

En partant de la définition de la loi de bernoulli, la probabilité d'avoir, parmi n tirages successifs indépendants x succès et donc n-x échecs est $\boxed{p^x q^{n-x}}$

D'autre part, on a $C_n^x \quad où \;\; 1 \leq x \leq n$ façons de combiner les x succès avec n-x échecs. D'où la définition :

3- LOI BINOMIALE $\mathscr{B}(n, p)$

A)- définition : Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si sa fonction de probabilité est de la forme :

$$P(X = x) = C_n^x \, p^x q^{n-x} \quad ; \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

où

$$\begin{cases} p & \textit{est la probabilité de succès} \\ q & \textit{est la probabilité d'echec} \\ C_n^x & \textit{est le nombre de combinaisons de } x \textit{ objets parmi } n \end{cases}$$

la loi ci-dessus permet de calculer la probabilité d’obtenir x succès parmi n épreuves indépendantes (*avec remise*).

B)- Moments : Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p ; alors leur somme X suit une loi binomiale de paramètre n et p :

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$$

- **Espérance:**

  L'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres n et p est ***np***

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

- **Variance :**

La variance de la loi binomiale est ***npq*** :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

➢**Propriété :** . Si $X_1 \leadsto \mathscr{B}(n_1, p)$ et $X_2 \leadsto \mathscr{B}(n_2, p)$ les v.a. X_1 et X_2 étant indépendantes, alors

$$X_1 + X_2 \leadsto \mathscr{B}(n_1 + n_2, p).$$

Remarque : $\mathscr{B}(1, p) = \mathscr{B}(p)$

C) Exemple

On lance 10 fois une pièce de monnaie. Soit la variable aléatoire X représentant le nombre de piles apparues. La probabilité d'obtenir exactement 8 fois piles est donc égale à $\mathbb{P}(X = 8) = \binom{8}{10}\frac{1}{2^8} \times \frac{1}{2^2} = 0.044$

D) DOMAINES ET LIMITATIONS

L'application la plus fréquente se situe dans le domaine des sondages

4- Lois Géométrique *et* Binomiale négative

A)- définition : *Loi Géométrique $\mathscr{G}(p)$*

la variable aléatoire X, représentant le nombre d' épreuves nécessaires pour parvenir au premier succès, suit une loi géométrique de paramètre p, notée $\mathscr{G}(p)$. sa fonction de probabilité est :

$$P(X = k) = pq^{k-1} \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots$$

C) DOMAINES ET LIMITATIONS

La loi Géométrique est utilisée en météorologie et en files d'attente.

B)- Moments :

- **Espérance:**
  Léspérance mathématique de la loi géométrique de paramètre p est ***1/p***

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\left(1 + 2q + 3q^2 + \cdots\right) = \frac{1}{p}$$

- **Variance :**

La variance de la loi géométrique de paramètre p est ***p/q²*** :

$$V(X) = pq\left(1 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \cdots\right) - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \left(\frac{p}{q^2}\right)$$

D)- définition : *Loi Binomiale négative* $\mathcal{BN}(r,p)$

La loi binomiale négative $\mathcal{BN}(r,p)$ est une généralisation de la loi géométrique où l'on considère X « nombre d'échecs avant de parvenir au r ème succès». Sa fonction de probabilité est

$$P(X=k)=C_{r+k-1}^{k}\,p^{r}q^{k}\quad;\quad k=0,1,2,\ldots$$

En effet pour toute séquence de *k* échecs et *r* succès la probabilité est $p^r q^k$. Sachant que le dernier résultat de la séquence doit être un succès, il reste à dénombrer les séquences avec *k* échecs et $r-1$ succès ce qui revient à dénombrer les possibilités de choix de *k* positions parmi $k+r-1$ positions, soit C_{r+k-1}^{k}.

<u>La loi binomiale négative est extrêmement utilisée pour décrire les phénomènes suivants : modélisation de la fréquentation de magasin, de la fidélité… etc.</u>

B)- Moments :

- **Espérance:**

  L'espérance mathématique de la loi binomiale négative $\mathscr{BN}_{(r,p)}$ est *r(1-p)/p*

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$$

- **Variance :**

La variance de la loi binomiale négative $\mathscr{BN}_{(r,p)}$ est $r(1-p)/p^2$:

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

5- LOI HYPERGEOMETRIQUE $\mathscr{H}(N, n, Np)$

A)- définition : Soit une population de N objets parmi lesquels une proportion p possède un certain caractère, on prélève un échantillon de n individus, ***sans remise***, dans cette population. Soit X le nombre d'objets qui possèdent cette propriété. On a

$$P(X = k) = \frac{C_{Np}^{k}\, C_{N-Np}^{n-k}}{C_{N}^{n}} \; ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

On note : $X \rightsquigarrow \mathscr{H}(N, n, Np)$,

B)- Moments :

- **Espérance:** $E(X) = np$

- **Variance :** $V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$

C) DOMAINES ET LIMITATIONS

Elle est utilisée en contrôle de qualité.
C'est la loi du tirage exhaustif. C'est celle aussi qui décrit certains jeux tel celui du Keno (quelle est la probabilité de donner 8 numéros sur 10 dans une liste de 66 nombres ?).

6 Loi de Poisson

A)- définition :

Une v.a. X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ si c'est une variable à valeurs entières, X(Ω) = ℕ et tel que :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \; ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

On note : $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$

B)- Moments :

- **Espérance et Variance :** $E(X) = V(X) = \lambda$.

<u>L'espérance</u> mathématique et la <u>variance</u> d'une loi de Poisson sont égales à son paramètre λ.

➢**Propriété :** Si $X_1 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\mu)$ les v.a. X_1 et X_2 étant <u>indépendantes</u>, alors

$$X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu)$$

C) Exemple

On considère des évènements se produisant en moyenne 1,5 fois par <u>minute</u>.

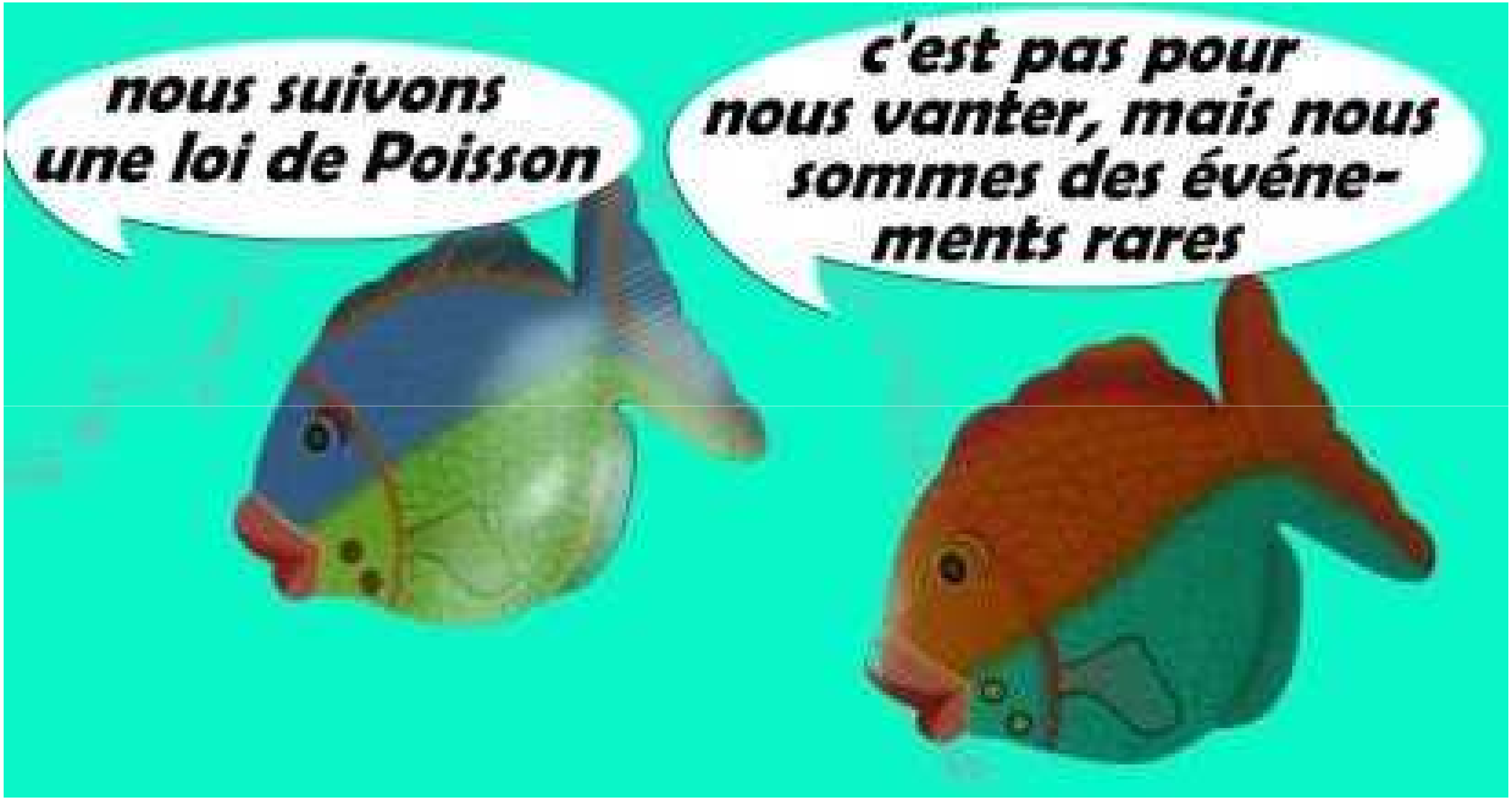
Pour étudier le nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps de 6 minutes, on utilise comme modèle une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1{,}5 \times 6 = 9$

Remarque : la loi de poisson correspond à la lois des événement rares (proba. Faible)

C) DOMAINES ET LIMITATIONS

est utilisée dans les cas suivants : le nombre de pannes d'un système arrivées dans un laps de temps... nombre d'appels téléphoniques enregistrés par un central ...***nombre d'accidents survenus à un assuré ...nombre d'arrivées à un guichet et*** la dans la finance pour modéliser la probabilité de défaut d'un crédit,***...***

Siméon Denis Poisson
1781 - 1840


nous suivons une loi de Poisson
c'est pas pour nous vanter, mais nous sommes des événe-ments rares

Loi multinomiale

- **Définition** : Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k), \in \mathbb{N}^k$, *suit une* loi multinomiale de paramètres

$$n \in \mathbb{N}, p_1 \ldots p_k \in [0,1], p_1 + \cdots + p_k = 1$$

Notée $\mathcal{M}(n, p_1 \ldots p_k), si$:

$$\mathbb{P}\big(X = (x_1, x_2, \ldots, x_k)\big) = !\frac{n}{n_1! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k},$$

$$n_1 + \cdots + n_k = n \ \ et \ \ où \ \ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$

Loi multinomiale

Espérance : $\mathbb{E}(X) = (np_1, npX_2, \dots, np_k)$

Variance : $\mathbb{V}(X_i) = np_i(1 - p_i)$

Covariance : $Cov\left(X_i, X_j\right) = -np_i p_j \; si \; i \neq j$

- Si on jette n boules que une par une aléatoirement dans k boîtes différentes chaque boule ayant la probabilité p_i d'être jetée dans la i-ème boîte, les nombres $(N_1, \dots, N_k)$ de boules dans les boîtes 1,…,k , suivent une loi multinomiale $\mathcal{M}(n, p_1, \dots, p_k)$.

II. LOIS CONTINUES USUELLES :

1- LOI UNIFORME SUR [a , b]

Une V.A.C. X suit une loi uniforme sur [a , b] si:

$$\begin{cases} 1) \quad X(\Omega) = [a, b] \\ 2) \quad la\ densité\ de\ f\ est \begin{cases} f(x) = 0 \quad si\ \ x \notin [a, b] \\ f(x) = \dfrac{1}{b-a} \quad si\ \ x \in [a, b] \end{cases} \end{cases}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a\,,\,b]}$

Moments :

➢ **Espérance et Variance:** $E(X) = \dfrac{a+b}{2} \quad et \quad V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

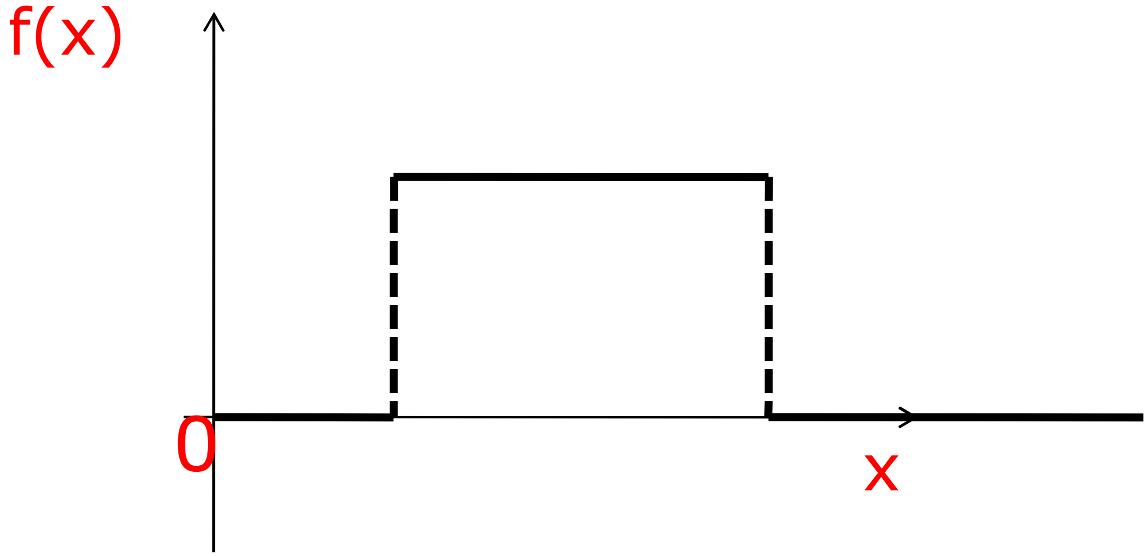
Applications : cette loi est à la base de la simulation de plusieurs autre lois continues.

II. LOIS CONTINUES USUELLES :

1- LOI UNIFORME SUR [a , b]

Remarque : la courbe de sa densité a une forme rectangulaire.

Exemple : La durée du retard des trains suit une loi Uniforme



II. LOIS CONTINUES USUELLES :

• 2- Loi de Paréto

- **Définition.** Une variable aléatoire *X, à valeurs positives, suit une loi de Paréto* de paramètre $p > 1$ *si sa densité est :*

$$f(x) = \frac{p-1}{x^p} \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)$$

Espérance : $\mathbb{E}(X) = \frac{p-1}{(p-2)} \quad si\ p > 2$

Variance : $\mathbb{V}(X) = \frac{p-1}{(p-3)(p-2)^2} \quad si\ p > 3$

II. LOIS CONTINUES USUELLES :

- Loi de Paréto

- **Applications :**

  – La loi de Paréto a été introduite pour modéliser la distribution de revenus supérieurs à un seuil donné.

II. <u>**LOIS CONTINUES USUELLES**</u> :

3- LOI Exponentielle

Définition. — Soit λ un nombre strictement positif ; une variable aléatoire X à valeurs dans]0,+∞[est dite exponentielle de paramètre λ>0, si elle admet pour densité

$$la\,densité\;\; f\; est \begin{cases} f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} & si\;\; x > 0 \\ 0 \quad si \leq 0 \end{cases}$$

On note X $\rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Moments : $$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad et \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Applications : La loi exponentielle est également le modèle de **durée de vie pour un système idéal sans usure.** 1/λ étant l'espérance de vie du système.

II. LOIS CONTINUES USUELLES :

1- LOI NORMALE (Laplace-Gauss) $\mathcal{N}(\mu\ ,\sigma^2)$

Une V.A.C. X suit une loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2 si :

$$\begin{cases} 1) \quad X(\Omega) = \mathbf{R} \\ 2) \quad \textit{la densité de f est : } f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\dfrac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right) \ \forall x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

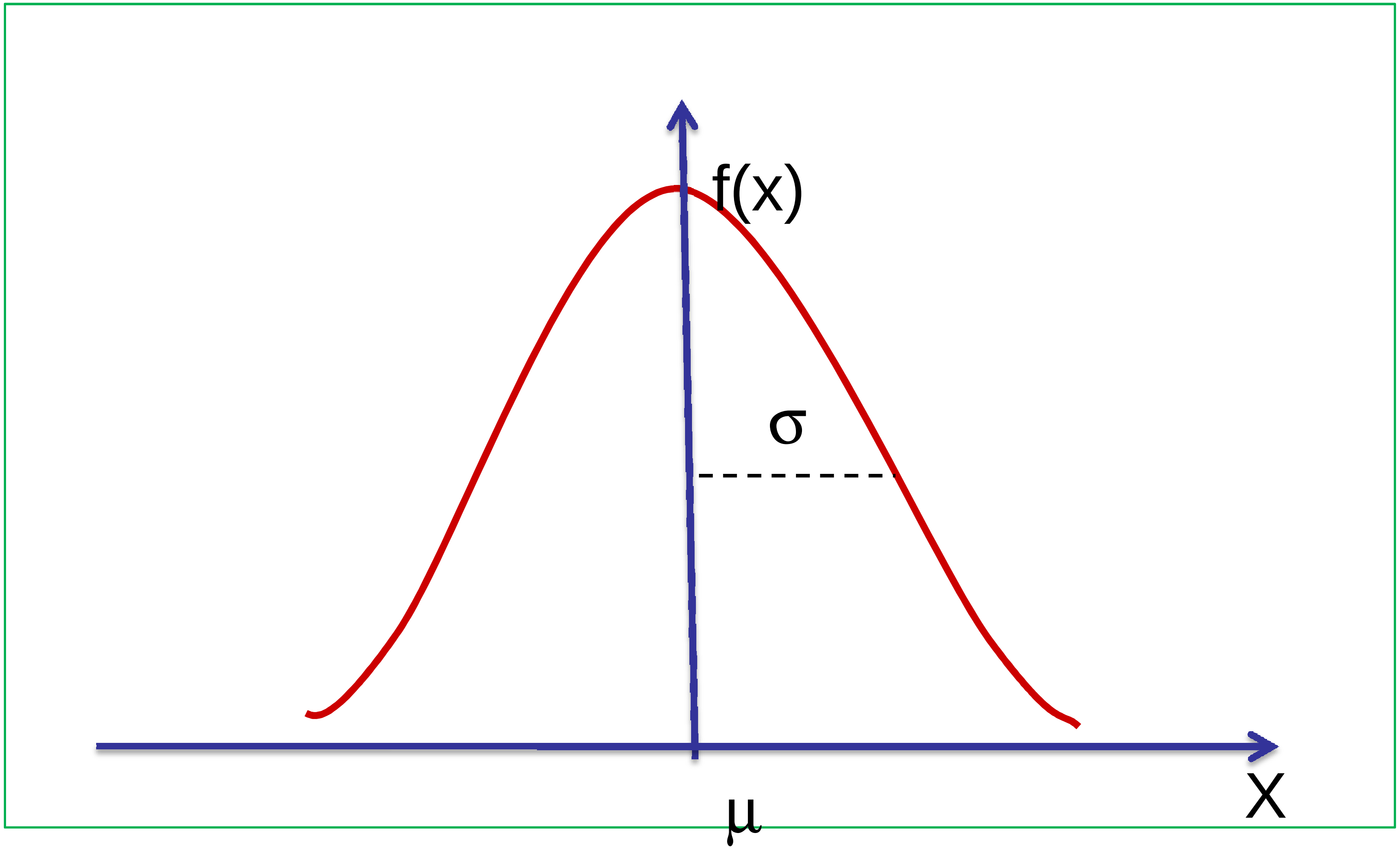
On note X $\rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu\ ,\sigma^2)$

Moments :

- **Espérance et Variance:**

Si X $\rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu\ ,\sigma^2)$ alors : $E(X) = \mu \quad et \quad V(X) = \sigma^2$

Densité de la loi $\mathcal{N}(\mu , \sigma^2)$



II. <u>LOIS CONTINUES USUELLES</u> :

Propriété 1

si:X $\leadsto \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et si Y=aX+b alors Y $\leadsto \mathcal{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

Propriété 2

si X $\leadsto \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et si Y $\leadsto \mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$

et si X et Y sont <u>indépendantes</u>, alors

S=X+Y $\leadsto \mathcal{N}(\mu+\mu', \sigma^2+\sigma'^2)$

Propriété 3

si: X $\leadsto \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \leadsto \mathcal{N}(0, 1)$

On dit que Z suit la loi normale <u>centrée réduite</u>.

II. LOIS CONTINUES USUELLES :

Remarque :

Si X suit une loi Normale centrée réduite alors:

$$la\ densité\ de\ f\ est\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2} x^2\right)$$

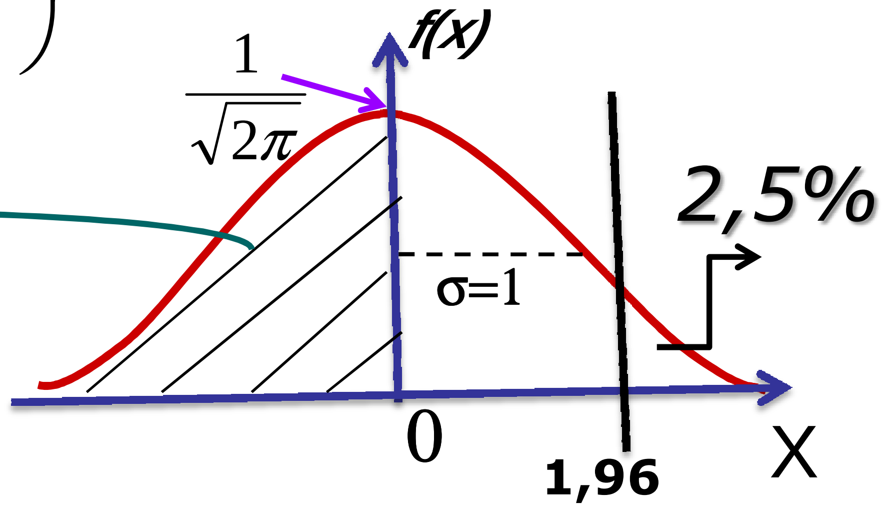
➢ **Fonction de Répartition de $\mathcal{N}(0\ ,\ 1)$ et Propriétés :**

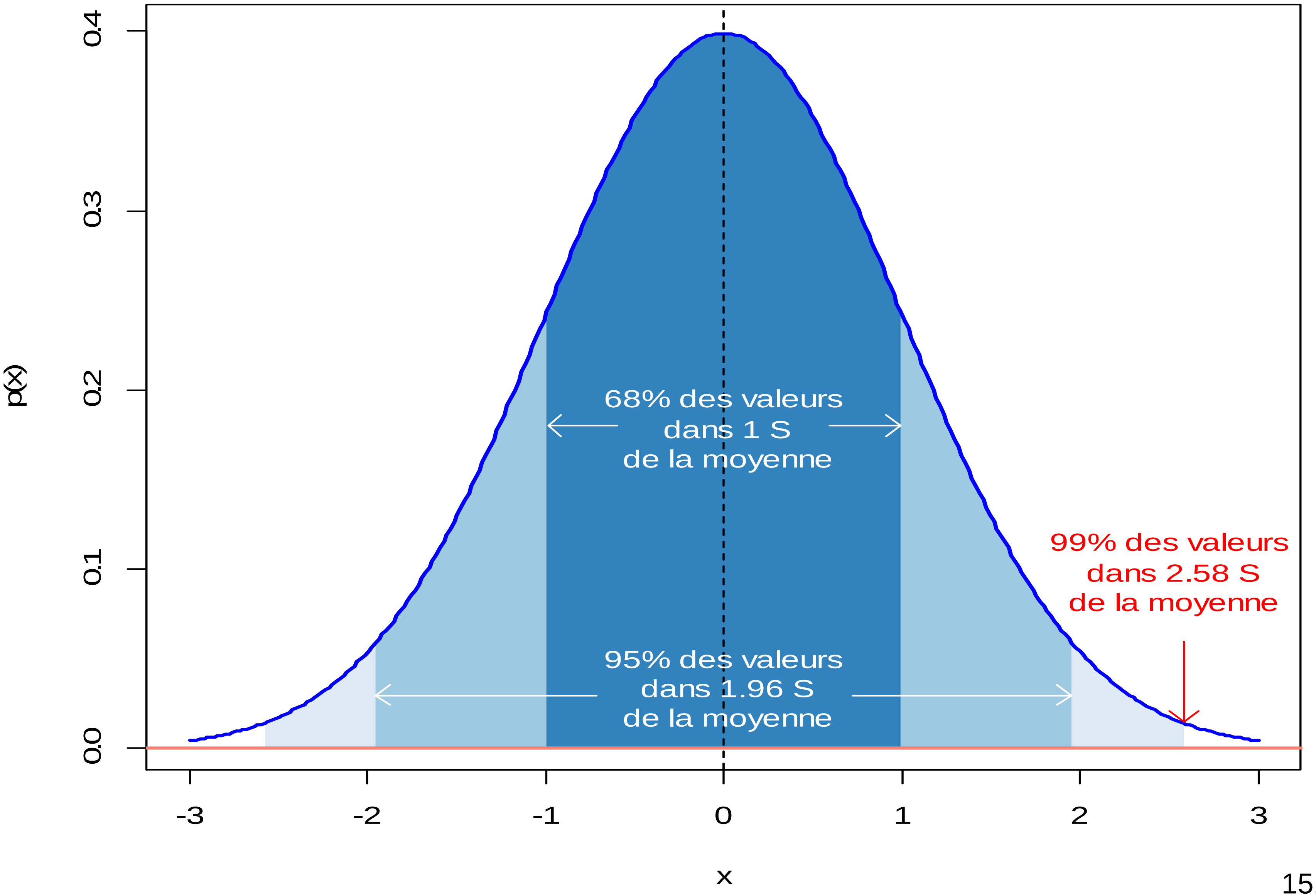
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2} t^2\right) dt$$

$$F(0) = P(X < 0) = 0{,}5$$

et

$$F(1{,}96) = 0{,}975$$





68% des valeurs
dans 1 S
de la moyenne
95% des valeurs
dans 1.96 S
de la moyenne
99% des valeurs
dans 2.58 S
de la moyenne
p(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

III. Approximation de LOIS :

1- Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson :

Si $n \geq 30 \ et \ p \leq 0.1$ alors $\mathscr{B}(n, p) \approx \mathscr{P}(\lambda = np)$

Exemple:

Soit X une VA suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n=36, p=0.04)$

$$P(X = 3) = C_{36}^{3} 0.04^{3} 0.96^{33} = 0.1188$$

En effet, par le logiciel R, on obtient:

```
> dbinom(3 , 36, 0.04)
[1] 0.1188034
> choose(36 , 3)*.04^3*.96^33
[1] 0.1188034
> dpois(3 , 1.44)
[1] 0.1179104
```

\# si X $\leadsto \mathscr{P}(\lambda)$; $P(X = 3) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{3}}{3!} = 0.1179$ avec $\lambda = 1.44$

III. Approximation de LOIS :

2- Approximation d'une loi Hypergéométrique par une loi Binomiale :

si le taux de sondage est inférieur à 10%: $\tau = \dfrac{n}{N} \leq 0.1$

Alors :

$$\mathscr{H}(N, n, Np) \approx \mathscr{B}(n, p)$$

En effet, par le logiciel R, on obtient:

> dbinom(3,10,0.2)

[1] **0.2013266**

> dhyper(3,20,80,10)

[1] **0.2092081**

$N - Np \;\; ; \;\; où \;\; N = 100 \;\; et \;\; p = 0.2$

III. Approximation de LOIS :

TCL (Théorème Central Limite)

Le théorème central limite est un théorème fondamental de la théorie statistique. Dans sa forme la plus simple, il prescrit que la somme d'un nombre suffisamment grand de variables aléatoires indépendantes et distribuées identiquement suit approximativement une **loi normale.**

On peut par exemple, à l'aide du théorème central limite, utiliser la loi **normale** comme approximation de la loi **binomiale,** de la loi de **Poisson,** de la loi **gamma,** de la loi **du chi-deux,** de la loi de **Student,** de la loi **hypergéométrique,** de la loi de **Fisher** et de la loi **lognormale.** *(extrait du dictionnaire encyclopédique de Yadollah Dodge)*

III. Approximation de LOIS :

3- TCL (Théorème Central Limite)

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *une suite de n variables aléatoires* indépendantes de même loi (quelconque) ayant une moyenne μ *et une variance finie* σ^2.

On définit la somme $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

Alors

$$Z = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma_{S_n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \approx \mathcal{N}(0, 1)$$

De même :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \approx \mathcal{N}(0, 1)$$

Où $\overline{X} = \dfrac{S_n}{n}$

III. Approximation de LOIS :

4- Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale

Soit ***$X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de n variables aléatoires*** indépendantes de même loi Bernoulli (p).

On définit la somme ***$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$***

Alors si $n \geq 30$ et $np \geq 5$ et $nq \geq 5$

$$Z = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma_{S_n}} = \sqrt{n}\,\frac{F - p}{\sqrt{pq}} \approx \mathcal{N}(0\,,\,1)$$

$$\text{Où} \quad F = \frac{S_n}{n}$$

Exemple:

Soit X une VA suivant une loi binomiale $\mathscr{B}$ ***(n=36 , p=0.2)***

On désire calculer $P\left(X=7\right)$?

$$n=36\geq 30\ ;\ np=7.2\geq 5\ ;\ nq=28.4\geq 5\underset{TCL}{\Rightarrow}\ X\approx N\left(7.2\ ;\ \sqrt{5.76}\right)$$

En utilisant, ce qu'on appelle, la *correction de continuité* :

$$P\left(X=k\right)=P(k-0.5\leq X<k+0.5)$$

$$P\left(X=7\right)=P(X\leq 7+0.5)-P(X<7-0.5)=F(7.5)-F(6.5)$$

$$=\pi\left(\frac{7.5-7.2}{\sqrt{5.76}}\right)-\pi\left(\frac{6.5-7.2}{\sqrt{5.76}}\right)=\ 0.164$$

En effet, par le logiciel R, on obtient:

> dbinom(7 , 36, 0.04) $P\left(X=7\right)=C_{36}^{7}0,2^{7}0,8^{29}=0,165$

[1] **0.1653428**

> pnorm((7.5-7.2)/sqrt(5.76))- pnorm((6.5-7.2)/sqrt(5.76))

[1] **0.164**

III. Approximation de LOIS :

5- Approximation de la loi de Poisson par la loi Normale :

Soit ***X une variable aléatoire*** de loi de Poisson(λ);

Alors si $\lambda \geq 18$

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx \mathcal{N}(0, 1)$$