# Formulaire de Probabilité

On considère une variable aléatoire réelle $X$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

| | CAS DISCRET | CAS CONTINU |
|---|---|---|
| Caractérisation de la loi de $X$ | Distribution de probabilités $P(X=x),\ x \in X(\Omega)$ | Densité de probabilités $f(x),\ x \in \mathbb{R}$ |
| Fonction de répartition $F_X$ de $X$ $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$ | $F_X(x) = \sum_{\substack{u \in X(\Omega) \\ u \leq x}} P(X=u)$ | $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ |
| $E(X)$ : Espérance mathématique de $X$ | $\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$ | $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ |
| $V(X)$ : Variance de $X$ | $\sum_{x \in X(\Omega)} (x-E(X))^2 P(X=x)$ | $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^2 f(x)dx$ |
| $E(\psi(X))$ : Espérance d'une fonction connue $\psi$ de $X$ | $\sum_{x \in X(\Omega)} \psi(x)P(X=x)$ | $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)f(x)dx$ |
| $m_k(X)$ : Moment d'ordre $k$ de $X$ | $\sum_{x \in X(\Omega)} x^k P(X=x)$ | $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$ |
| $\mu_k(X)$ : Moment centré d'ordre $k$ de $X$ | $\sum_{x \in X(\Omega)} \big(x-E(X)\big)^k P(X=x)$ | $\int_{-\infty}^{+\infty} \big(x-E(X)\big)^k f(x)dx$ |
| $\sigma(X)$ : écart-type de $X$ | $\sqrt{V(X)}$ | $\sqrt{V(X)}$ |

**Théorème de Koenig-Huyghens** :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad E((X-a)^2) = V(X) + (E(X)-a)^2$$

On notera aussi que $\quad V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

**Probabilité conditionnelle**

Soit $B$ un événement de probabilité non nulle, soit $A$ un événement quelconque.
La probabilité de $A$ sachant (ou conditionnellement à) $B$ est notée $P(A \mid B)$ ou $P(A/B)$.
Elle vérifie :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Formule des probabilités totales**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements c'est-à-dire une partition de $\Omega$.
Pour tout événement $B$, on a

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} P(B \mid A_i)P(A_i).$$

**Formule de Bayes ou probabilité des causes**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements, et $B$ un événement de probabilité non nulle.
Alors :

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i\in I} P(B \mid A_i)P(A_i)}.$$

**Formule des probabilités composées**

Soient $n$ événements $A_1, \cdots, A_n$ tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)...P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

FORMULES POUR $n$ TIRAGES DANS UNE URNE à $N$ BOULES

| | Tirages avec remise | Tirages sans remise |
|---|---|---|
| Urne à 2 catégories<br>$N_1 = Np$ est le nombre de boules de catégorie 1 | Formule binomiale<br>$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ | Formule hypergéométrique<br>$\dfrac{C_{N_1}^k \times C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$ |
| Urne à $K$ catégories<br>$N_i = Np_i$ est le nombre de boules de catégorie $i$ | Formule multinomiale<br>$\dfrac{n!}{n_1!...n_K!} \prod_{i=1}^{K} p_i^{n_i}$ | Formule polyhypergéométrique<br>$\dfrac{\prod_{i=1}^{K} C_{N_i}^{n_i}}{C_N^n}$ |

LOIS DE PROBABILITES DISCRETES CLASSIQUES

| Dénomination | Loi de probabilité | Espérance | Variance | $X(\Omega)$ |
|---|---|---|---|---|
| Loi Uniforme Discrète $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ $n \in \mathbb{N}^*$ | $P_x = \frac{1}{n}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ | $[\![1,n]\!]$ |
| Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ $p \in ]0,1[$ | $P_0 = 1-p$ et $P_1 = p$ | $p$ | $p(1-p)$ | $\{0,1\}$ |
| Loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ $n \in \mathbb{N}^*, p \in ]0,1[$ | $P_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$ | $np$ | $np(1-p)$ | $[\![0,n]\!]$ |
| Loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ $(N,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times ]0,1[$ | $P_x = \frac{C_{Np}^x C_{N(1-p)}^{n-x}}{C_N^n}$ | $np$ | $np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$ | $\subset [\![0,n]\!]$ |
| Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ | $P_x = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $\mathbb{N}$ |
| Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$ $p \in ]0,1[$ | $P_x = (1-p)p^{x-1}$ | $\frac{1}{1-p}$ | $\frac{p}{(1-p)^2}$ | $\mathbb{N}^*$ |
| Loi de Pascal $\mathcal{P}a(k,p)$ $k \in \mathbb{N}^*, p \in ]0,1[$ | $P_x = C_{x-1}^{k-1}(1-p)^k p^{x-k}$ | $\frac{k}{1-p}$ | $\frac{kp}{(1-p)^2}$ | $[\![k,+\infty[\![$ |
| Loi Binomiale Négative $\mathcal{BN}(k,p)$ $k \in \mathbb{N}^*, p \in ]0,1[$ | $P_x = C_{x+k-1}^x (1-p)^k p^x$ | $\frac{kp}{1-p}$ | $\frac{kp}{(1-p)^2}$ | $\mathbb{N}$ |

LOIS DE PROBABILITES CONTINUES CLASSIQUES

| Dénomination | Loi de probabilité | Espérance | Variance | $X(\Omega)$ |
|---|---|---|---|---|
| Loi Uniforme Continue $\mathcal{U}[a,b]$ <br> $(a,b) \in I\!R^2,\ a < b$ | $\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $[a,b]$ |
| Loi Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ <br> $\mu \in I\!R, \sigma \in I\!R_+^*$ | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $I\!R$ |
| Loi Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ <br> $\lambda \in I\!R_+^*$ | $\lambda\exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $[0,+\infty[$ |
| Loi Log-Normale $\mathcal{LN}(\mu,\sigma)$ <br> $\mu \in I\!R, \sigma \in I\!R_+^*$ | $\frac{\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ | $e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ | $(e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$ | $]0,+\infty[$ |
| Gamma $\gamma(a,\lambda)$ <br> $a \in I\!R_+^*, \lambda \in I\!R_+^*$ | $\frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)$ | $\frac{a}{\lambda}$ | $\frac{a}{\lambda^2}$ | $]0,+\infty[$ |
| Khi-deux $\chi^2(n)$ <br> $n \in I\!N^*,\ (\chi^2(n) = \gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2}))$ | $\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{x}{2}}\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)$ | $n$ | $2n$ | $]0,+\infty[$ |
| Student $\mathcal{T}(n)$ <br> $n \in I\!N^*$ | $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}$ | $0$ <br> si $n > 1$ | $\frac{n}{n-2}$ <br> si $n > 2$ | $I\!R$ |
| Fisher-Snédécor $\mathcal{F}(m,n)$ <br> $m \in I\!N^*, n \in I\!N^*$ | $\frac{n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)}{B(\frac{n}{2},\frac{m}{2})(m+nx)^{\frac{m+n}{2}}}$ | $\frac{n}{n-2}$ <br> si $n > 2$ | $\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ <br> si $n > 4$ | $]0,+\infty[$ |
| Cauchy $\mathcal{C}(a)$ <br> $a \in I\!R_+^*$ | $\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ | pas définie | pas définie | $I\!R$ |