Résumé sur les Variables aléatoires, lois usuelles et théorèmes de convergence.

Dans tout ce qui suit nous nous placerons dans l'espace probabilisé (Ω, P).

Variables aléatoires : généralités.

Une **variable aléatoire**, X, est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On utilisera l'abréviation V.A..
E une partie de $\mathbb{R}$, $(X \in E) = X^{-1}(E) \stackrel{def}{=} \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in E\}$ est **l'image réciproque** de E par l'application X.
La **loi de probabilité** (ou **loi**) de X est l'application P_X définie sur les parties E de $\mathbb{R}$ par $\mathbf{P_X(E) = P(X \in E)}$.
La loi de probabilité de X est une probabilité sur $\mathbb{R}$.
La **fonction de répartition** F_X de la V.A. X (ou de la loi P_X) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = P(X \leq x).$$

Elle est à valeurs dans $[0,1]$; $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
Deux V.A. X et Y sont dites **indépendantes** si pour toutes parties E et F de $\mathbb{R}$:
$P((X \in E) \cap (Y \in F)) = P(X \in E)P(Y \in F)$.

Variables aléatoires discrètes.

On dit qu'une V.A. est **discrète** si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. On notera $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$.
Dans le cas de V.A. discrètes

- La loi de probabilité d'une V.A. discrète X est donnée par $p_i = P(X = x_i)$ pour tous les x_i de $X(\Omega)$.
- La fonction de répartition d'une V.A. discrète X est une fonction en escaliers et $P_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.
- Deux V.A. discrètes X et Y prenant respectivement pour valeurs $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots\}$ sont indépendantes ssi $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ pour tous x_i et y_j.

Variables aléatoires à densité.

On dit qu'une V.A. est **à densité** s'il existe une fonction continue sur $\mathbb{R}$, f, sauf peut-être en un nombre fini de points, telle que $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$ pour tous réels $a \leq b$. La fonction f est appelée **densité** de la loi de X.
Une densité est une fonction positive, continue sauf peut-être en un nombre fini de points, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.
Dans le cas de V.A. à densité

- $P(X = a) = 0$.
- La fonction de répartition d'une V.A. à densité est continue et $F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)\,dt = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$.
- En tout point x_0 où la densité f est continue, la fonction de répartition F_X est dérivable et $F'_X(x_0) = f(x_0)$.
- Deux V.A. à densité X et Y sont indépendantes ssi pour tous réels x et y $P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$.

Paramètres de position et dispersion.

Espérance pour une V.A. discrète.
Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ alors **l'espérance** de X est définie par

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots + x_n P(X = x_n) + \cdots$$

Si ϕ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $E(\phi(X)) = \phi(x_1)P(X = x_1) + \phi(x_2)P(X = x_2) + \cdots + \phi(x_n)P(X = x_n) + \cdots$. Ces sommes sont finies si $X(\Omega)$ est fini.

Espérance pour une V.A. à densité.
Si X a pour densité f alors **l'espérance** de X est définie par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt.$$

Si ϕ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f(t)\,dt$.

Variance d'une V.A..
La **variance** de X (paramètre de dispersion) est définie par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Pour les calculs on utilise plutôt la propriété $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriétés de l'espérance et de la variance.
$E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
Pour toutes V.A. X et Y, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
Pour deux V.A. indépendantes X et Y, $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Lois usuelles.

Loi de Bernouilli notée $\mathcal{B}(p)$.
Elle modélise les expériences avec seulement deux issues possibles : réussite ou échec.
$X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = q = 1 - p$. $E(X) = p\,;$ $V(X) = p(1 - p)$.
Loi de Binomiale notée $\mathcal{B}(n, p)$.
Elle modélise les expériences où l'on répète n fois de façons indépendantes une épreuve de Bernouilli et on compte le nombre de réussites.
$X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$. $E(X) = np\,;$ $V(X) = np(1 - p)$.
Loi de Poisson notée $\mathcal{P}(\lambda)$.
C'est la loi du nombre d'événements survenant pendant une durée donnée, les temps d'attente entre deux événements étant indépendants entre-eux et ne dépendent pas de l'instant où l'on se trouve (la loi du temps d'attente est une loi sans mémoire).
$X(\Omega) = \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ pour tout entier k. $E(X) = \lambda\,;$ $V(X) = \lambda$.
Loi uniforme sur $[a, b]$.
$X(\Omega) = [a, b]$, densité : $f(t) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(t)$. $E(X) = \frac{b+a}{2}\,;$ $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
Loi exponentielle notée $\mathcal{E}(\lambda)$.
C'est la loi d'une V.A. à valeurs positives et "sans mémoire". Loi de temps d'attente ou encore de durée de vie.
$X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, densité : $f(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\lambda e^{-\lambda t}$ $(\lambda > 0)$. $E(X) = \frac{1}{\lambda}\,;$ $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
Loi normale notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
$X(\Omega) = \mathbb{R}$, densité : $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$. $E(X) = m\,;$ $V(X) = \sigma^2$.
Si X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $aX + b$ suit une loi $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.
Cas particulier fondamental : si X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ dite **loi normale centrée réduite**. Pour les calculs on se ramène toujours à la loi normale centrée réduite.
On note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, quelques astuces de calculs
$F(0) = 0.5$.
$F(a) = P(X \leq a) = P(X \geq -a) = 1 - F(-a)$.
Si $a \leq 0 \leq b$ alors $P(a \leq X \leq b) = F(b) + F(-a) - 1$, etc.
Somme de variables aléatoires indépendantes et suivant une loi normale : si X et Y sont deux V.A. indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$ alors $X + Y$ est de loi $\mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.

Théorème limite central.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées d'espérance m et de variance σ^2 alors pour tous réels $a < b$ et n grand

$$P\Big(a < \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < b\Big) \simeq P(a < N < b)$$

où N est une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
En particulier pour n grand, p et $1 - p$ pas trop petits, on peut approcher une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(nm, np(1 - p))$.