# Formulaire de Probabilités et Statistiques

AD+JS

## 1 Rappels de combinatoire

**Arrangements avec répétitions** Nombre d'applications d'un ensemble à $k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments :

$$n^k$$

**Arrangements (sans répétitions)** Nombre d'arrangements de $k$ objets choisis parmi $n$:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

**Permutations** Nombre de permutations de $n$ objets :

$$A_n^n = n!$$

**Combinaisons (sans répétitions)** Nombre de combinaisons de $k$ objets choisis parmi $n$ (ou nombre de sous-ensembles à $k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments):

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \qquad \text{(coefficient binomial)}$$

**Combinaisons avec répétitions** Nombre de répartitions de $n$ boules indiscernables dans $k$ urnes discernables:

$$C_{n+k-1}^n = C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

**Coefficients multinomiaux** Nombre de répartitions de $n$ boules discernables dans $k$ urnes discernables avec $n_1$ boules dans la $1^{\text{ère}}$ urne, $n_2$ boules dans la $2^{\text{ème}}$ urne, ..., $n_k$ boules dans la $k^{\text{ème}}$ urne:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \qquad \text{(coefficient multinomial)}$$

**Propriétés élémentaires des coefficients binomiaux**

$$\begin{aligned}
C_n^{k-1} + C_n^k &= C_{n+1}^k && \text{(triangle de Pascal)} \\
C_{n+m}^k &= \sum_{j=0}^{k} C_m^j C_n^{k-j} && \text{(formule de Vandermonde )} \\
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} && \text{(formule du binôme)} \\
(1-x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k && \text{(série géométrique généralisée )}
\end{aligned}$$

## 2 Probabilités élémentaires

**Modelè probabiliste** L'ensemble fondamental $\Omega$ est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience. Un événement $A$ est un sous-ensemble de $\Omega$. Une distribution de probabilités $P$ sur $\Omega$ associe à tout événement $A$ un nombre $P(A)$, tel que $0 \leq P(A) \leq 1$, appelé probabilité de $A$.

Ci-dessous, soient $A$, $B$, $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ des événements. On note $A^c$ le complémentaire de $A$ dans $\Omega$.

Une partition de $\Omega$ (un système complet d'événements) $\{B_i\}_{i=1}^n$ a les propriétés que l'union des événements est $\Omega$ et qu'ils sont disjoints deux á deux:

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega, \qquad B_j \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

**Propriétés élémentaires de $P$**

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \\ P(A^c) &= 1 - P(A) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

**Formule d'inclusion-exclusion à $n$ termes**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

**Événements indépendants** $A$ et $B$ sont indépendants ssi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

**Événements indépendants deux à deux**

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \qquad i \neq j$$

**Événements totalement indépendants**

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}) \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, k = 1, \ldots, n$$

**Probabilités conditionnelles** Si $A$ est un événement quelconque et si l'événement $B$ vérifie $P(B) > 0$ alors la probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$ est

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Conditionnement multiple**

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

**Formule des probabilités totales** Soit $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de $\Omega$, avec $P(B_i) > 0$, $\forall i$. Alors pour tout événement $A$,

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n).$$

**Formule de Bayes** Soit $\{B_i\}_{i=1}^n$ une partition de $\Omega$, avec $P(B_i) > 0$, $\forall i$. Alors pour tout événement $A$ de probabilité non nulle

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n)}.$$

## 3 Variables aléatoires réelles

**Variables discrètes** Une variable aléatoire réelle $X$ est une fonction $X : \Omega \to E$ ou $E$ est un sous-ensemble de nombres réels. Si $E$ est discrèt, alors $X$ est appelé variable aléatoire discrète. Dans ce cas la distribution de probabilités de $X$ est la donnée des nombres : $P(X = x_k)$. La fonction $f_X(x) = P(X = x)$ est appelée fonction de masse.

**Fonction de répartition** $F_X(t) = P(X \leq t)$

**Quantile** Pour une probabilité $0 < p < 1$, la $p$ quantile de $F_X$ est $x_p = \inf\{x : F_X(x) \geq p\}$. Très souvent on a $F_X(x_p) = p$.

**Variables continues** $X$ est une variable aléatoire continue si sa fonction de répartition s'écrit sous la forme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \qquad \text{donc} \qquad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx},$$

où $f_X(x)$ est une fonction non négative, appelée densité de $X$.

**Couples de variables aléatoires** On considère des événements relatifs à deux variables aléatoires $X$ et $Y$.

**Fonction de répartition conjointe** $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Pour un couple $(X, Y)$ conjointement continu

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} dy\, f_{X,Y}(s, t) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s, t)\, dsdt$$

et $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$.

**Fonction de répartition marginale** $F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$. Pour un couple $(X, Y)$ conjointement continu

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds$$

où $f_X(x)$ est la densité marginale de $X$ donnée par $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$.

**Variables aléatoires indépendantes** Deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes si pour tous ensembles $A$ et $B$,

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B).$$

En particulier:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y).$$

Dans le cas de deux variables discrètes

$$P(X = x_k \text{ et } Y = y_l) = P(X = x_k)\, P(Y = y_l), \qquad \forall x_k, y_l \in \mathbb{R},$$

et dans le cas de deux variables continues

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Loi de probabilité d'une fonction de variables aléatoires**

**Changement de variables à une dimension** Si $X$ est une variable aléatoire continue de densité $f_X(x)$ et si $Y = g(X)$ pour une fonction $g$ réelle et inversible, on a

$$F_Y(y) = \int\limits_{g^{-1}(-\infty,y)} f_X(x)dx.$$

Si $g(x)$ est strictement monotone et continûment dérivable, alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ est une variable aléatoire continue, avec densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} \right|, & \text{si } y = g(x) \text{ pour un } x \text{ quelconque,} \\ 0, & \text{si } y \neq g(x) \text{ pour tout } x. \end{cases}$$

**Changement de variables à deux dimension** Si $(X_1, X_2)$ sont deux variables aléatoires conjointement continues de densité $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ et si $(Y_1, Y_2) = (g_1(X_1,X_2), g_2(X_1,X_2))$ pour une fonction $g = (g_1, g_2)$ inversible, on a

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \iint\limits_{\substack{g_1(x_1,x_2) \leq y_1 \\ g_2(x_1,x_2) \leq y_2}} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$$

En particulier, si $g(x)$ est une bijection continûment dérivable avec son inverse noté par $h = (h_1, h_2)$, alors le couple aléatoire $(Y_1, Y_2)$ est conjointement continu, avec densité

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}\left(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)\right)\, |J(y_1,y_2)|$$

où $|J(y_1,y_2)|$ est le jacobien de $h$, et

$$J(y_1,y_2) = \frac{\partial h_1}{\partial y_1}\frac{\partial h_2}{\partial y_2} - \frac{\partial h_1}{\partial y_2}\frac{\partial h_2}{\partial y_1}.$$

## 4 Espérance mathématique

**Définition** Soit $X$ une variable aléatoire. On désigne par

$$\mathrm{E}[X] = \int x dF_X(x)$$

l'espérance mathématique de $X$, definie quand $\mathrm{E}(|X|) < \infty$.

**Espérance d'une fonction de variables aléatoires** Soit $g$ une fonction réelle. L'espérance de $g(X)$ se calcul par $\mathrm{E}[g(X)] = \int g(x)dF_X(x)$. En particulier,

**pour une variable discrète** $\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{k\in K} g(x_k)P(X = x_k)$

**pour une variable continue** $\mathrm{E}[g(X)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\,dx$

**pour un couple** $(X, Y)$ $\mathrm{E}[g(X, Y)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{X,Y}(x, y)\,dxdy$

**Propriétés de l'espérance**

**Espérance d'une constante** $\mathrm{E}[c] = c$ pour toute constante $c$ réelle

**Linéarité** $\mathrm{E}[a + bX + cY] = a + b\mathrm{E}[X] + c\mathrm{E}[Y]$ pour tous réels $a, b, c$

**Positivité** $\mathrm{E}[X] \geq 0$ si $X \geq 0$

**Variance et covariance** Soient $X$ et $Y$ variables aléatoires telles que $\mathrm{E}(X^2), \mathrm{E}(Y^2) < +\infty$. On définit les quantités suivantes:

**Variance de $X$**

$$\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$$

**Covariance de $X$ et $Y$**

$$\mathrm{cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$

**Coefficient de corrélation de $X$ et $Y$**

$$\mathrm{corr}[X, Y] = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{var}[X]}\sqrt{\mathrm{var}[Y]}}$$

**Variance et covariance — propriétés:** $\mathrm{var}[X] = \mathrm{cov}[X, X]$, et $\mathrm{var}[X] \geq 0$.

**(Bi-)Linéarité de la covariance** Pour $a, b, c$ réels,

$$\mathrm{cov}[a + bX_1 + cX_2, Y] = b\ \mathrm{cov}[X_1, Y] + c\ \mathrm{cov}[X_2, Y].$$

**Variance et covariance**

$$\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\mathrm{cov}[X, Y]$$

**Homogénéité de la variance** Pour tout $a$ réel, $\mathrm{var}[aX] = a^2\ \mathrm{var}[X]$.

**Transformée de Laplace et moments** Soit $X$ une variable aléatoire et $t \in \mathbb{R}$. On appelle fonction génératrice des moments (FGM) (aussi transformée de Laplace) la fonction définie par

$$\mathcal{M}_X(t)(\equiv (\mathcal{L}_X(t)) = \mathrm{E}[e^{tX}],$$

si elle est finie.

**Moment d'ordre $k$** Pour tout entier positif $k$, le moment d'ordre $k$ est $\mathrm{E}[X^k]$.

**Moment centré d'ordre $k$** Pour tout entier positif $k$, le moment centré d'ordre $k$ est $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^k]$. En particulier, si $k = 2$, on a $\mathrm{var}[X]$.

**Fonction génératrice des cumulants** Soit $X$ une variable aléatoire et $t \in \mathbb{R}$. On appelle fonction génératrice des cumulants la fonction définie par

$$\mathcal{K}_X(t) = \log \mathcal{M}_X(t) = \log \mathrm{E}[e^{tX}],$$

si elle est finie.

**Cumulant d'ordre $k$** Pour tout entier positif $k$, le cumulant d'ordre $k$ est $\kappa_k$ donné par

$$\mathcal{K}_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k \frac{t^k}{k!};$$

on a également $\kappa_k = d^k \mathcal{K}_X(t)/dt^k|_{t=0}$. En particulier, $\mathrm{E}[X] = \kappa_1$, $\mathrm{var}[X] = \kappa_2$.

**Quelques inégalités classiques**

**Inégalité de Cauchy–Schwarz** $|\mathrm{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathrm{E}[X^2]} \cdot \sqrt{\mathrm{E}[Y^2]}$

**Inégalité de Jensen** Si $g$ est une fonction convexe, i.e. pour $t \in [0,1]$: $g(t\,x + (1-t)\,y) \leq t\,g(x) + (1-t)\,g(y)$, alors

$$g(\mathrm{E}[X]) \leq \mathrm{E}[g(X)]$$

**Inégalité de Markov** Si $X \geq 0$ et si $a > 0$, alors

$$P(X \geq a) \leq \mathrm{E}[X]/a.$$

**Inégalité de Bienaymé–Chebychev** Pour tout $a > 0$, on a

$$P(|X - \mathrm{E}[X]| \geq a) \leq \mathrm{var}[X]/a^2.$$

# 5 Variables aléatoires — Lois usuelles

## 5.1 Lois discrètes

| Nom | Paramètres | $P(X=k)$ | $\mathrm{E}[X]$ | $\mathrm{var}[X]$ | $\mathcal{M}_X(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Bernoulli | $0 \le p \le 1$ | $p^k(1-p)^{1-k}$<br>$k=0,1$ | $p$ | $p(1-p)$ | $pe^t+1-p$<br>$\forall t$ |
| Binomiale | $n$<br>$0 \le p \le 1$ | $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$<br>$k \in \{0,1,\ldots,n\}$ | $np$ | $np(1-p)$ | $\big(pe^t+1-p\big)^n$<br>$\forall t$ |
| Géométrique | $0 < p \le 1$ | $p(1-p)^{k-1}$<br>pour $k \in \{1,2,\ldots\}$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | $\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$<br>si $(1-p)e^t<1$ |
| Binomiale négative | $n \in \{2,3,\ldots\}$<br>$0 \le p \le 1$ | $C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$<br>$k \in \{n,n+1,\ldots\}$ | $\frac{n}{p}$ | $n \cdot \frac{1-p}{p^2}$ | $\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^n$<br>si $(1-p)e^t<1$ |
| Hyper-géométrique | $n, N_1, N_2$<br>$n \le N_1+N_2$ | $\frac{C_{N_1}^k \cdot C_{N_2}^{n-k}}{C_{N_1+N_2}^n}$<br>$\max(0,n-N_2) \le k \le \min(n,N_1)$ | $\frac{N_1 \cdot n}{N_1+N_2}$ | $\frac{nN_1N_2(N_1+N_2)}{(N_1+N_2)^2(N_1+N_2-1)}$ | |
| Poisson | $\lambda>0$ | $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$<br>$k \in \{0,1,\ldots\}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $e^{\lambda(e^t-1)}$<br>$\forall t$ |

## 5.2 Lois continues

| Nom | Paramètres | Densité $f(x)$ | $\mathrm{E}[X]$ | $\mathrm{var}[X]$ | $\mathcal{M}_X(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Uniforme | $a<b$ | $1/(b-a)$<br>si $x \in [a,b]$ (0 sinon) | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$<br>$\forall t \neq 0$ |
| Exponentielle | $\lambda>0$ | $\lambda e^{-\lambda x}$<br>pour $x>0$ (0 sinon) | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{\lambda}{\lambda-t}$<br>si $t<\lambda$ |
| Gamma | $\lambda>0, n\ge 1$ | $\frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}$<br>pour $x>0$ (0 sinon) | $\frac{n}{\lambda}$ | $\frac{n}{\lambda^2}$ | $(\frac{\lambda}{\lambda-t})^n$<br>si $t<\lambda$ |
| Gaussienne | $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2>0$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$<br>pour tout $x$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\exp(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2)$<br>$\forall t$ |
| Student<br>$(t_\nu)$ | $\nu \ge 1$ | $\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})(1+x^2)^{(\nu+1)/2}}$<br>pour tout $x$ | 0<br>si $\nu \ge 2$ | $\frac{1}{\nu-2}$<br>si $\nu \ge 3$ | |
| Chi deux<br>$(\chi^2_\nu)$ | $\nu \ge 1$ | $\frac{x^{\nu/2-1}e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}$<br>pour $x>0$ (0 sinon) | $\nu$ | $2\nu$ | $(1-2t)^{-\frac{\nu}{2}}$<br>si $t<\frac{1}{2}$ |

### 5.3 Théorèmes limites

**Loi hypergéométrique vers une loi binomiale** Soit $(X_m)$ une suite de variables hypergéométriques de paramètres $N_1(m), N_2(m)$ et $n$, avec $\frac{N_1(m)}{N_1(m)+N_2(m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p$. Alors pour chaque valeur $0 \le k \le n$:

$$P(X_m = k) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

**Loi binomiale vers une loi de Poisson** Soit $X_n$ une variable aléatoire binomiale de paramètres $(n,p)$. Si $n \to \infty$ et $p \to 0$ tel que $np \to \lambda$, alors

$$P(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Loi géométrique vers une loi exponentielle** Soit $T$ une variable aléatoire géometrique de paramètre $p$. Si $n \to \infty$ et $p \to 0$ tel que $n \cdot p \to \lambda > 0$, alors

$$P(T/n > t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

**Loi binomiale vers une loi gaussienne** Soit $X_n$ une variable aléatoire binomiale de paramètres $(n,p)$.

**Théorème de Moivre-Laplace** Si $n \to \infty$ et $k \sim np$, alors

$$P(X_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\, e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

**Théorème central limite** Si $n \to \infty$,alors pour tout $t$ réel

$$P(X_n \le np + \sqrt{np(1-p)} \cdot t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

## 6 Variables indépendantes et théorèmes limites

**Indépendance de plusieurs variables aléatoires** Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si elles vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes:

**(i)** Les fonctions de répartition respectives $F_X, F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ de $X = (X_1, \dots, X_n), X_1, \dots, X_n$ vérifient pour tous $x_i$ réels , $i = 1, \dots, n$:

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n).$$

**(ii)** Pour toutes fonctions $g_1, \dots, g_n$, on a

$$E[g_1(X_1)\cdots g_n(X_n)] = \mathrm{E}[g_1(X_1)]\cdots \mathrm{E}[g_n(X_n)]$$

Une ensemble de variables $X_1, \dots, X_n$ indepéndantes et identiquement distribuées (iid) est appelé un échantillon aléatoire. On note, par exemple $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} F$, ou $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} f$.

**Cas particuliers de (ii)** Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes:

$$E[X_1 \cdots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \cdots \mathrm{E}[X_n], \quad \mathcal{M}_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \mathcal{M}_{X_1}(t) \cdots \mathcal{M}_{X_n}(t)$$

**Indépendance et covariance** Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors

$$\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = 0, \quad \forall i \neq j.$$

**Maximum et minimum de variables aléatoires indépendantes** Soient

$$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n).$$

$X_{(n)}$ et $X_{(1)}$ ont pour fonctions de répartition respectives

$$F_{X_{(n)}}(x) = F_{X_1}(x) \cdots F_{X_n}(x), \quad F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x)) \cdots (1 - F_{X_n}(x))$$

**Théorèmes limites pour les valeurs extrêmes de variables iid** Soit $X_1, \dots, X_n, \dots \overset{\text{iid}}{\sim} F$, et soient $\tau > 0$, et $(x_n)_{n \geq 1}$ , une suite de nombres réels vérifiant

$$\lim_{n \to \infty} n[1 - F(x_n)] = \tau.$$

Alors

$$P(X_{(n)} \leq x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{-\tau}.$$

Si une telle suite existe, alors il existent des suites $(b_n)_{n \geq 1}$, $(a_n > 0)_{n \geq 1}$, telles que

$$P\left(\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \leq y\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} H(y) = \begin{cases} \exp\left[-\{1 + \xi(y - \eta)/\tau\}_+^{-1/\xi}\right], & \xi \neq 0, \\ \exp\left[-\exp\{-(y - \eta)/\tau\}\right], & \xi = 0, \end{cases}$$

où $u_+ = u$ pour $u > 0$ et $u_+ = 0$ pour $u \leq 0$, et $\eta, \xi \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$.

**Statistique d'ordre et vecteur des rangs** Soient $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} f$, ceci étant une fonction de densité. Les variables ordonnées $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ sont appelées statistique d'ordre associé à $X_1, \dots, X_n$. On appelle $R_j$ le rang de la valeur $X_j$ et $(R_1, \dots, R_n)$ le vecteur des rangs associé à $X_1, \dots, X_n$. Alors le vecteur des rangs et la statistique d'ordre sont indépendantes et $(R_1, \dots, R_n)$ a une distribution uniforme dans l'ensemble des permutations de $\{1, \dots n\}$. La statistique d'ordre a pour densité

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) \dots f(x_n), & x_1 \leq \cdots \leq x_n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Loi limite des statistiques d'ordre centrales** Soient $0 < p < 1$, $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} F$, $F$ une loi continue avec densité $f$, et $x_p = F^{-1}(p)$. Alors si $f(x_p) > 0$,

$$\frac{X_{(\lceil np \rceil)} - x_p}{[p(1-p)/\{nf(x_p)^2\}]^{1/2}} \xrightarrow{D} N(0, 1) \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

En particulier la mediane, avec $p = 0.5$, a une loi limite normale, de même que les quartiles, avec $p = 0.25, 0.75$: pour $n$ grand,

$$X_{(\lceil np \rceil)} \quad \dot{\sim} \quad N\left(x_p, \frac{p(1-p)}{nf(x_p)^2}\right).$$

**Sommes de variables indépendantes** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

**Somme de deux variables indépendantes discrètes**

$$P(S_2 = y) = \sum_{(j,k):y=x_j^{(1)}+x_k^{(2)}} P(X_1 = x_j^{(1)})P(X_2 = x_k^{(2)})$$

**Somme de deux variables indépendantes continues** La densité $f_{S_2}$ de $S_2 = X_1 + X_2$ est donnée par la convolution de $f_{X_1}$ et $f_{X_2}$, i.e.

$$f_{S_2}(y) = f_{X_1} * f_{X_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y-x) f_{X_2}(x) dx$$

**Somme de $n$ variables indépendantes continues** La densité $f_{S_n}$ de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est donnée par la convolution des densités $f_{X_j}$ : $f_{S_n} = f_{X_1} * \cdots * f_{X_n}$.

**Théorèmes de stabilité**

**Loi binomiale** Soient $S_m$ et $S_n$ deux variables aléatoires binomiales indépendantes de paramètres $(m, p)$ et $(n, p)$. Alors $S_m + S_n$ suit une loi binomiale de paramètres $(m + n, p)$.

**Loi de Poisson** Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Alors $X_1 + X_2$ suit une loi Poisson de paramètres $\lambda_1 + \lambda_2$.

**Loi normale** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes avec $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$, et soient $a, b_1, \ldots, b_n$ des constantes. Alors la combinaison linéaire

$$a + b_1X_1 + \cdots + b_nX_n \sim \mathcal{N}(a + b_1\mu_1 + \cdots + b_n\mu_n, b_1^2\sigma_1^2 + \cdots + b_n^2\sigma_n^2).$$

**Lois des grands nombres** Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles iid d'espérance $\mu$ et variance $\sigma^2$. Alors, la moyenne $S_n/n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ converge en probabilité vers $\mu$ (**loi faible**). La moyenne converge aussi presque sûrement vers $\mathrm{E}[X]$, i.e. la probabilité de l'événement " $S_n/n$ converge vers $\mathrm{E}[X]$ " est égale 1 (**loi forte**).

**Théorème central limite** Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$une suite de variables aléatoires réelles iid d'espérance $\mu$ et variance $\sigma^2$. La suite des sommes partielles centrées et réduites

$$Z_n = \tfrac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en distribution vers une variable $\mathcal{N}(0, 1)$ (normale standard):

$$P(Z_n \leq z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2}\, dy = \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

## 7 Eléments de Statistique

**Biais et Risque d'un estimateur** Si $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ est un estimateur du paramètre $\theta$, on appelle *biais* de $\widehat{\theta}$:

$$B_\theta(\widehat{\theta}) = E_\theta[\widehat{\theta}] - \theta$$

et *risque (quadratique)* ou *erreur moyenne quadratique* de $\widehat{\theta}$ l'espérance du carré de $\widehat{\theta} - \theta$:

$$R_\theta(\widehat{\theta}) = E_\theta[(\widehat{\theta} - \theta)^2]$$

$\widehat{\theta}$ sera dit *consistant* si $\widehat{\theta}$ converge en probabilité vers $\theta$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, i.e. si

$$P(|\widehat{\theta} - \theta| > \epsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \forall \epsilon > 0$$

**Intervalles de confiance (IC) et tests**

**(i) Cas d'un échantillon gaussien** Dans ce qui suit on considère $n$ observations $x_1, \ldots, x_n$ correspondant aux réalisations de $n$ variables gaussiennes indépendantes $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. IC au niveau $1 - \alpha$ fixé (e.g. $1 - \alpha = 0,95 \equiv 95\%$, $\alpha = 0,99 \equiv 99\%$), pour l'espérance $\mu$ lorsque $\sigma^2$ est *connu*: soit $\overline{x} = n^{-1}(x_1 + \cdots + x_n)$, alors l'IC est

   $$I_\alpha = [\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\ \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} - z_{\alpha/2}\ \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}],$$

   où $z_p$ est le $p$-quantile d'une variable gaussienne $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, donc $P(Z \leq z_p) = p$.

2. IC au niveau $1 - \alpha$ pour l'espérance $\mu$ lorsque $\sigma^2$ est *inconnu*:

   $$J_\alpha = \left[\ \overline{x} - t_{n-1}(1 - \alpha/2)\ \tfrac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} - t_{n-1}(\alpha/2)\ \tfrac{s}{\sqrt{n}}\ \right],$$

   où $(n-1)s^2 = \sum(x_i - \overline{x})^2$ et $t_\nu(p)$ est le $p$-quantile d'une variable de Student à $\nu$ degrés de liberté.

3. L'IC au niveau $1 - \alpha$ pour la variance $\sigma^2$ s'obtient à partir de la variance empirique $s^2$ comme:

   $$[\ (n-1)s^2/\chi^2_{n-1}(1 - \alpha/2); (n-1)s^2/\chi^2_{n-1}(\alpha/2)\ ]$$

   où $\chi^2_\nu(p)$ est le $p$-quantile de la loi de khi-deux à $\nu$ degrés de liberté.

**(ii) Estimateur de maximum de vraisemblance** Soit $y$ la réalisation d'une variable aléatoire $Y$ dont la loi est $f(y;\theta)$, avec scalaire paramètre $\theta$ inconnu, alors la log vraisemblance est $\ell(\theta) = \log f(y;\theta)$ et l'information observée est

$$J(\theta) = -\frac{d^2\ell(\theta)}{d\theta^2}.$$

Sous des conditions de régularité, un IC approximé au niveau $1-\alpha$ pour $\theta$ est $\widehat{\theta} \pm z_{1-\alpha/2} J(\widehat{\theta})^{-1/2}$, où $\widehat{\theta}$ est l'estimation de maximum de vraisemblance de $\theta$, qui satisfait $\ell(\widehat{\theta}) \geq \ell(\theta)$, $\forall\theta$. Souvent $y = (y_1, \ldots, y_n)$ est supposé la réalisation d'un échantillon aléatoire $Y_1, \ldots, Y_n$, et dans ce cas

$$\ell(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \log f(y_j;\theta), \quad J(\theta) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{d^2 \log f(y_j;\theta)}{d\theta^2},$$

$f(y_j;\theta)$ étant la densité de $Y_j$.

**(iii) Tests d'hypothèses** Soit $x_1, \ldots, x_n$ un échantillon correspondant aux réalisations $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} P_\theta$ (inconnue). On fait une hypothèse $H_0$ sur la distribution $P_\theta$ (par exemple: $\theta = \theta_0$) et l'on veut tester si les observations $x_1, \ldots, x_n$ permettent de rejeter l'hypothèse $H_0$. On choisi une statistique de test $T$, construit de telle manière que des grandes valeurs de $T$ suggerent que $H_0$ soit fausse, et on calcul le niveau de signification

$$p_{\text{obs}} = \text{Pr}_0(T \geq t_{\text{obs}}),$$

où $t_{\text{obs}}$ est la valeur observée de $T$, c'est à dire sa valeur calculée avec les données $x_1, \ldots, x_n$, et $\text{Pr}_0$ représent une probabilité calculée sous $H_0$. Plus $p_{\text{obs}}$ est petite, plus on doubte $H_0$.

Une autre possibilité est de fixer un niveau $\alpha$ à l'avance (e.g. $\alpha = 0,05 \equiv 5\%$, $\alpha = 0,01 \equiv 1\%$ ou $\alpha = 0,001 \equiv 0,1\%$), de trouver le $(1-\alpha)$ quantile de la loi de $T$ sous $H_0$, et de rejeter $H_0$ si $t_{\text{obs}}$ excede ce quantile.

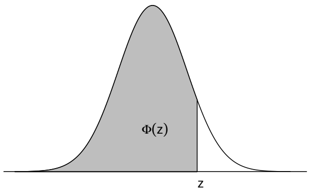
Dans le cas d'un échantillon $x_1, \ldots, x_n$ correspondant à des variables $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\sigma^2$ connue et $\mu$ inconnue, on pourra rejeter l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ au niveau $\alpha$ si $\mu_0 \notin I_\alpha$, où $I_\alpha$ est l'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour la moyenne $\mu$, autrement dit: on rejettera l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ au niveau $\alpha$ si

$$\left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\alpha/2}$$

Si $\sigma^2$ est inconnue on rejettera l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ au niveau $\alpha$ si $\mu_0 \notin J_\alpha$, donc si

$$\left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| > t_{n-1}(1 - \alpha/2).$$

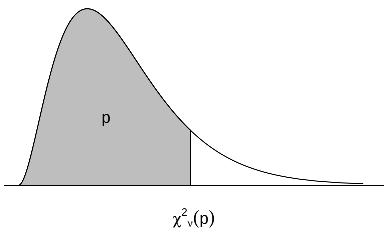
# Distribution normale standard $\Phi(z)$




Pour $z < 0$ on utilise symmetrie: $P(Z \leq z) = \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$, $z \in \mathbb{R}$.

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .50000 | .50399 | .50798 | .51197 | .51595 | .51994 | .52392 | .52790 | .53188 | .53586 |
| 0.1 | .53983 | .54380 | .54776 | .55172 | .55567 | .55962 | .56356 | .56750 | .57142 | .57535 |
| 0.2 | .57926 | .58317 | .58706 | .59095 | .59483 | .59871 | .60257 | .60642 | .61026 | .61409 |
| 0.3 | .61791 | .62172 | .62552 | .62930 | .63307 | .63683 | .64058 | .64431 | .64803 | .65173 |
| 0.4 | .65542 | .65910 | .66276 | .66640 | .67003 | .67364 | .67724 | .68082 | .68439 | .68793 |
| 0.5 | .69146 | .69497 | .69847 | .70194 | .70540 | .70884 | .71226 | .71566 | .71904 | .72240 |
| 0.6 | .72575 | .72907 | .73237 | .73565 | .73891 | .74215 | .74537 | .74857 | .75175 | .75490 |
| 0.7 | .75804 | .76115 | .76424 | .76730 | .77035 | .77337 | .77637 | .77935 | .78230 | .78524 |
| 0.8 | .78814 | .79103 | .79389 | .79673 | .79955 | .80234 | .80511 | .80785 | .81057 | .81327 |
| 0.9 | .81594 | .81859 | .82121 | .82381 | .82639 | .82894 | .83147 | .83398 | .83646 | .83891 |
| 1.0 | .84134 | .84375 | .84614 | .84850 | .85083 | .85314 | .85543 | .85769 | .85993 | .86214 |
| 1.1 | .86433 | .86650 | .86864 | .87076 | .87286 | .87493 | .87698 | .87900 | .88100 | .88298 |
| 1.2 | .88493 | .88686 | .88877 | .89065 | .89251 | .89435 | .89617 | .89796 | .89973 | .90147 |
| 1.3 | .90320 | .90490 | .90658 | .90824 | .90988 | .91149 | .91309 | .91466 | .91621 | .91774 |
| 1.4 | .91924 | .92073 | .92220 | .92364 | .92507 | .92647 | .92786 | .92922 | .93056 | .93189 |
| 1.5 | .93319 | .93448 | .93574 | .93699 | .93822 | .93943 | .94062 | .94179 | .94295 | .94408 |
| 1.6 | .94520 | .94630 | .94738 | .94845 | .94950 | .95053 | .95154 | .95254 | .95352 | .95449 |
| 1.7 | .95543 | .95637 | .95728 | .95818 | .95907 | .95994 | .96080 | .96164 | .96246 | .96327 |
| 1.8 | .96407 | .96485 | .96562 | .96638 | .96712 | .96784 | .96856 | .96926 | .96995 | .97062 |
| 1.9 | .97128 | .97193 | .97257 | .97320 | .97381 | .97441 | .97500 | .97558 | .97615 | .97670 |
| 2.0 | .97725 | .97778 | .97831 | .97882 | .97932 | .97982 | .98030 | .98077 | .98124 | .98169 |
| 2.1 | .98214 | .98257 | .98300 | .98341 | .98382 | .98422 | .98461 | .98500 | .98537 | .98574 |
| 2.2 | .98610 | .98645 | .98679 | .98713 | .98745 | .98778 | .98809 | .98840 | .98870 | .98899 |
| 2.3 | .98928 | .98956 | .98983 | .99010 | .99036 | .99061 | .99086 | .99111 | .99134 | .99158 |
| 2.4 | .99180 | .99202 | .99224 | .99245 | .99266 | .99286 | .99305 | .99324 | .99343 | .99361 |
| 2.5 | .99379 | .99396 | .99413 | .99430 | .99446 | .99461 | .99477 | .99492 | .99506 | .99520 |
| 2.6 | .99534 | .99547 | .99560 | .99573 | .99585 | .99598 | .99609 | .99621 | .99632 | .99643 |
| 2.7 | .99653 | .99664 | .99674 | .99683 | .99693 | .99702 | .99711 | .99720 | .99728 | .99736 |
| 2.8 | .99744 | .99752 | .99760 | .99767 | .99774 | .99781 | .99788 | .99795 | .99801 | .99807 |
| 2.9 | .99813 | .99819 | .99825 | .99831 | .99836 | .99841 | .99846 | .99851 | .99856 | .99861 |
| 3.0 | .99865 | .99869 | .99874 | .99878 | .99882 | .99886 | .99889 | .99893 | .99896 | .99900 |
| 3.1 | .99903 | .99906 | .99910 | .99913 | .99916 | .99918 | .99921 | .99924 | .99926 | .99929 |
| 3.2 | .99931 | .99934 | .99936 | .99938 | .99940 | .99942 | .99944 | .99946 | .99948 | .99950 |
| 3.3 | .99952 | .99953 | .99955 | .99957 | .99958 | .99960 | .99961 | .99962 | .99964 | .99965 |
| 3.4 | .99966 | .99968 | .99969 | .99970 | .99971 | .99972 | .99973 | .99974 | .99975 | .99976 |
| 3.5 | .99977 | .99978 | .99978 | .99979 | .99980 | .99981 | .99981 | .99982 | .99983 | .99983 |
| 3.6 | .99984 | .99985 | .99985 | .99986 | .99986 | .99987 | .99987 | .99988 | .99988 | .99989 |
| 3.7 | .99989 | .99990 | .99990 | .99990 | .99991 | .99991 | .99992 | .99992 | .99992 | .99992 |
| 3.8 | .99993 | .99993 | .99993 | .99994 | .99994 | .99994 | .99994 | .99995 | .99995 | .99995 |
| 3.9 | .99995 | .99995 | .99996 | .99996 | .99996 | .99996 | .99996 | .99996 | .99997 | .99997 |

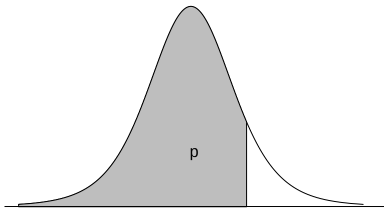
# Distribution $\chi^2_\nu$




Des quantiles $\chi^2_\nu(p)$ pour la distribution en khi-carré à $\nu$ degrés de liberté.

| $\nu$ | .005 | .01 | .025 | .05 | .10 | .25 | .50 | .75 | .90 | .95 | .975 | .99 | .995 | .999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | .0002 | .010 | .0039 | .0158 | .102 | .455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 | 10.8 |
| 2 | .0100 | .0201 | .0506 | .103 | .211 | .575 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 | 13.8 |
| 3 | .0717 | .115 | .216 | .352 | .584 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 | 16.3 |
| 4 | .207 | .297 | .484 | .711 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 | 18.5 |
| 5 | .412 | .554 | .831 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 | 20.5 |
| 6 | .676 | .872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 | 22.5 |
| 7 | .989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 | 24.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 | 26.1 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 | 27.9 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 | 29.6 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.3 | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 | 31.3 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.3 | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 | 32.9 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.3 | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 | 34.5 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.2 | 13.3 | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 | 36.1 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.0 | 14.3 | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 | 37.7 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.9 | 15.3 | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 | 39.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 12.8 | 16.3 | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 | 40.8 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 13.7 | 17.3 | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 | 42.3 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 14.6 | 18.3 | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 | 43.8 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 15.5 | 19.3 | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 | 45.3 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 16.3 | 20.3 | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 | 46.8 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 17.2 | 21.3 | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 | 48.3 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 18.1 | 22.3 | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 | 49.7 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 19.0 | 23.3 | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 | 51.2 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 19.9 | 24.3 | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 | 52.6 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 20.8 | 25.3 | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 | 54.1 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 21.7 | 26.3 | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 | 55.5 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 22.7 | 27.3 | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 | 56.9 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 23.6 | 28.3 | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 | 58.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 24.5 | 29.3 | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 | 59.7 |
| 40 | 20.7 | 22.2 | 24.4 | 26.5 | 29.1 | 33.7 | 39.3 | 45.6 | 51.8 | 55.8 | 59.3 | 63.7 | 66.8 | 73.4 |
| 50 | 28.0 | 29.7 | 32.4 | 34.8 | 37.7 | 42.9 | 49.3 | 56.3 | 63.2 | 67.5 | 71.4 | 76.2 | 79.5 | 86.7 |
| 60 | 35.5 | 37.5 | 40.5 | 43.2 | 46.5 | 52.3 | 59.3 | 67.0 | 74.4 | 79.1 | 83.3 | 88.4 | 92.0 | 99.6 |
| 70 | 43.3 | 45.4 | 48.8 | 51.7 | 55.3 | 61.7 | 69.3 | 77.6 | 85.5 | 90.5 | 95.0 | 100. | 104. | 112. |

# Distribution $t_\nu$ de Student




Des quantiles $t_\nu(p)$ pour la distribution $t$ de Student à $\nu$ degrés de liberté.

Pour $p < 0$ on utilise la symmétrie: $t_\nu(p) = -t_\nu(1-p)$.

| $\nu$ | .75 | .9 | .95 | .975 | .99 | .995 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 31.82 | 63.66 |
| 2 | .8165 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | .7649 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | .7407 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | .7267 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | .7176 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | .7111 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | .7064 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | .7027 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | .6998 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | .6974 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | .6955 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | .6938 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | .6924 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | .6912 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | .6901 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | .6892 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | .6884 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | .6876 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | .6870 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | .6864 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | .6858 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | .6853 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | .6848 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | .6844 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | .6840 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | .6837 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | .6834 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | .6830 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | .6828 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 40 | .6807 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 50 | .6794 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 |
| 100 | .6770 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 |
| $\infty$ | .6745 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |