Synthèse de cours (Terminale S)
→ Lois de probabilité

Eléments de dénombrement

Factorielle d'un entier naturel

Soit *n* un entier naturel.

Si *n* est non nul, on appelle « factorielle *n* » ou « factorielle de *n* », l'entier, noté $n!$, égal au produit de tous les entiers non nuls inférieurs ou égaux à *n* :

$$n! = n\times(n-1)\times(n-1)\times...\times 2\times 1$$

On pose :

$$0! = 1$$

Remarque : c'est le nombre de listes sans répétition de *n* éléments d'un ensemble à *n* éléments (une telle liste est appelée « permutation »).

Nombre de listes de p éléments d'un ensemble de n éléments

Dans ce qui suit, l'ensemble considéré contient *n* éléments ($n \geq 1$).

Listes avec répétition

A partir d'un ensemble à *n* éléments, on peut construire $\underbrace{n\times n\times...\times n}_{p\text{ facteurs}} = \boxed{n^p}$ (où $p \geq 1$) listes avec répétition.

Listes sans répétition

A partir d'un ensemble à *n* éléments, on peut construire $\underbrace{n\times(n-1)\times(n-1)\times...\times(n-p+1)}_{p\text{ facteurs}} = \boxed{\dfrac{n!}{(n-p)!}}$ (où $1 \leq p \leq n$) listes sans répétition.

Combinaison

Définition

Soit n un entier naturel et E un ensemble à n éléments.
Soit p un entier naturel inférieur ou égal à n.

On appelle « combinaison de p éléments de E » toute partie de E comportant p éléments.

Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments vaut :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

$\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n » et est appelé « coefficient binomial » (voir plus loin).

Exemples fondamentaux : un ensemble à n éléments ne contient qu'une partie à 0 élément (la partie vide) et une partie à n éléments (lui-même). On a donc :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Propriétés

Pour tout n entier naturel et tout p entier naturel inférieur ou égal à n :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

Remarque : cette égalité repose sur le fait que dans tout ensemble à n éléments, toute partie de p éléments admet un unique complémentaire qui compte, lui, $n-p$ éléments.

Pour tout n entier naturel <u>non nul</u> et tout p entier naturel <u>non nul</u> inférieur ou égal à n :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}}$$

On dispose ainsi d'une relation de récurrence. Il s'agit de la relation de Pascal.

Triangle de Pascal

Le relation de récurrence ci-dessus permet, notamment, de construire rapidement les premières valeurs de $\binom{n}{p}$ et on obtient le triangle de Pascal :

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & \boxed{4} & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & \boxed{\mathbf{10}} & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & \iddots & & & & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

La symétrie du triangle illustre la première propriété mentionnée ci-dessus.

On peut également adopter la disposition suivante :

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & p=0 & p=1 & p=2 & p=3 & p=4 & p=5 & \cdots \\
n=0 & 1 & & & & & & \\
n=1 & 1 & 1 & & & & & \\
n=2 & 1 & 2 & 1 & & & & \\
n=3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
n=4 & 1 & \boxed{4} & \boxed{6} & 4 & 1 & & \\
n=5 & 1 & 5 & \boxed{\mathbf{10}} & 10 & 5 & 1 & \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Formule du binôme de Newton

Pour tous a et b complexes et tout n entier naturel, on a :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Soit :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^0 b^{n-0} + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^{n-(n-1)} + \binom{n}{n} a^n b^{n-n} \\
&= b^n + nab^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + \ldots + na^{n-1} b + a^n
\end{aligned}
$$

C'est de cette formule que provient la dénomination « coefficient binomial » pour $\binom{n}{p}$.

Remarque : en choisissant $a = b = 1$, on obtient la belle égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Ainsi, la somme des éléments de la ligne n du triangle de Pascal est égale à 2^n.
D'un point de vue ensembliste, ce résultat s'interprète comme suit : dans un ensemble à n éléments, il y a un total de 2^n parties.

Loi de Bernoulli – Loi binomiale

Loi de Bernoulli

Définition

On appelle « expérience de Bernoulli » toute expérience aléatoire dont l'univers compte deux issues. Traditionnellement l'une est appelée « succès » et l'autre « échec ».

Remarque : les dénomination de « succès » et d' « échec » sont historiques et ne doivent pas être interprétées systématiquement !

On appelle « loi de probabilité de Bernoulli » (ou « loi de Bernoulli ») la loi de probabilité associée à une expérience de Bernoulli. A l'issue « succès » on associe la valeur 1 de probabilité p et à l'issue « échec » on associe la valeur 0 de probabilité $q = 1 - p$. On dit alors que la loi de Bernoulli est une « loi de Bernoulli de paramètre p ».

Une loi de Bernoulli est donc parfaitement définie par un tableau du type :

x	1	0
$p(X = x)$	p	$1 - p$

Espérance et variance d'une loi de Bernoulli

L'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut :

$$\boxed{E = p}$$

La variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut :

$$\boxed{V = p(1 - p) = pq}$$

Schéma de Bernoulli

On appelle « schéma de Bernoulli », la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Loi binomiale

A un schéma de Bernoulli, on associe la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus. X peut prendre toutes les valeurs entières inférieures ou égales à n.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p et on la note : $\mathscr{B}(n;p)$.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on a :

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Exemple typique : n lancers d'une pièces de monnaie équilibrée. Chaque lancer est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Le nombre de « PILE » obtenu à l'issue des n lancers suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n;\frac{1}{2}\right)$.

Espérance et variance d'une loi Binomiale

L'espérance de la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ vaut :

$$\boxed{E=np}$$

La variance de la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ vaut :

$$\boxed{V=np(1-p)}$$

Remarque : on obtient donc l'espérance et la variance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ à partir de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p en les multipliant respectivement par n.

Lois continues

Introduction

Dans cette partie, on s'intéresse à des variables aléatoires prenant des valeurs dans des intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point et de longueur non nécessairement finie.

La loi de probabilité associée à une telle variable aléatoire sera dite « continue ».

Si la variable aléatoire est définie sur un intervalle *I*, on s'intéresse aux événements de la forme :

- $X \in [\alpha;\beta]$ ($[\alpha;\beta] \subset I$) si *I* est de la forme $[a;b]$;
- $X \in [\alpha;\beta]$ ($[\alpha;\beta] \subset I$) ou $X \in [\alpha;+\infty]$ ($[\alpha;+\infty] \subset I$) si *I* est de la forme $[a;+\infty]$;

On notera : $p\left(X \in [\alpha;\beta]\right) = p\left([\alpha;\beta]\right)$ et $p\left(X \in [\alpha;+\infty[\right) = p\left([\alpha;+\infty[\right)$.

Remarque : $p\left([\alpha;\beta]\right) = p\left([\alpha;\beta[\right) = p\left(]\alpha;\beta]\right) = p\left(]\alpha;\beta[\right)$ et $p\left([\alpha;+\infty[\right) = p\left(]\alpha;+\infty[\right)$.

Notion de densité

On dit qu'une loi de probabilité continue définie sur l'intervalle *I* admet pour « densité » la fonction *f* si :

- *f* est définie, positive et continue sur *I* ;
- $\int_I f(t)\,dt = 1$;
- Pour tout intervalle $[\alpha;\beta]$ inclus dans *I* : $p\left([\alpha;\beta]\right) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$.

Remarque : lorsque $I = [a;+\infty]$, l'écriture « $\int_I f(t)\,dt$ » correspond à $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$. Cette intégrale est égale à la limite, lorsqu'elle existe, de $\int_a^x f(t)\,dt$ quand *x* tend vers $+\infty$.

Loi uniforme

Soit a et b deux réels ($a < b$).

On appelle « loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ » la loi continue dont la densité f est constante sur cet intervalle.

On a :

$$\forall x \in [a;b],\ f(x) = \frac{1}{b-a}$$

On a alors, pour tout intervalle $[\alpha;\beta]$ inclus dans $[a,b]$:

$$p([\alpha;\beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Loi exponentielle

On appelle « loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) » la loi continue dont la densité est définie par :

$$\forall x \in [0;+\infty],\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

On a alors, pour tout intervalle $[\alpha;\beta]$ inclus dans $[0;+\infty]$:

$$p([\alpha;\beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$

Et pour tout réel α positif :

$$p([0;\alpha]) = \int_{0}^{\alpha} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda\alpha}$$

$$p([\alpha;+\infty[) = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \int_{0}^{\alpha} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda\alpha}$$