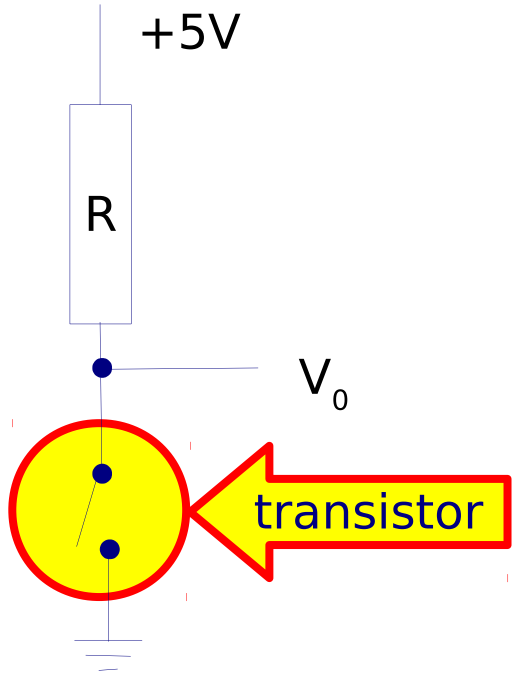
Algèbre de Boole

Introduction

- les informations utilisées par les ordinateurs que nous étudions sont de type binaire
- un système binaire (signal, circuit, etc...) est un système qui ne peut exister que dans 2 états

  0/1, vrai/faux, ouvert/fermé, haut/bas (high/low), etc...
- circuit électrique associé :



Introduction

- Algèbre de Boole : pour la logique des systèmes binaires
- en mathématiques : variable booléenne : 0 ou 1
- en électronique : 2 niveaux de tension V(0) et V(1)
  - logique positive : V(1) > V(0)
  - logique négative : V(1) < V(0)

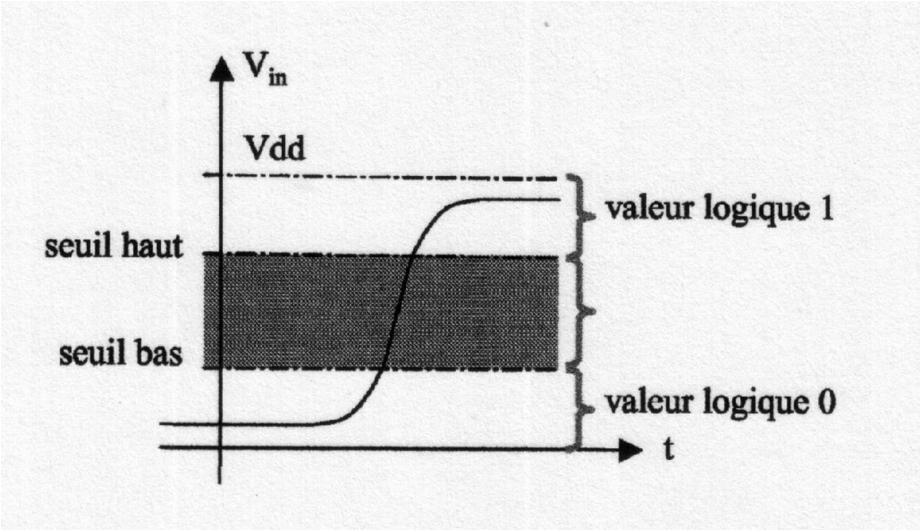
Niveau	Logique positive	Logique négative
H	1	0
L	0	1

Introduction

- en technologie TTL positive (obsolète maintenant dans le domaine informatique)
  - alimentation 5V
  - rapide
  - niveau haut : 2 volt < V < 5 volt
  - niveau bas : V < 0,8 volt
- en technologie CMOS positive (la plus fréquente)
  - alimentation valim de 5 à 15 volt
  - faible consommation
  - niveau haut : $V > 0,7 * V_{alim}$
  - niveau bas : $0,05 \text{ volt} < V < 0,3 * V_{alim}$

Représentation symbolique des signaux booléens

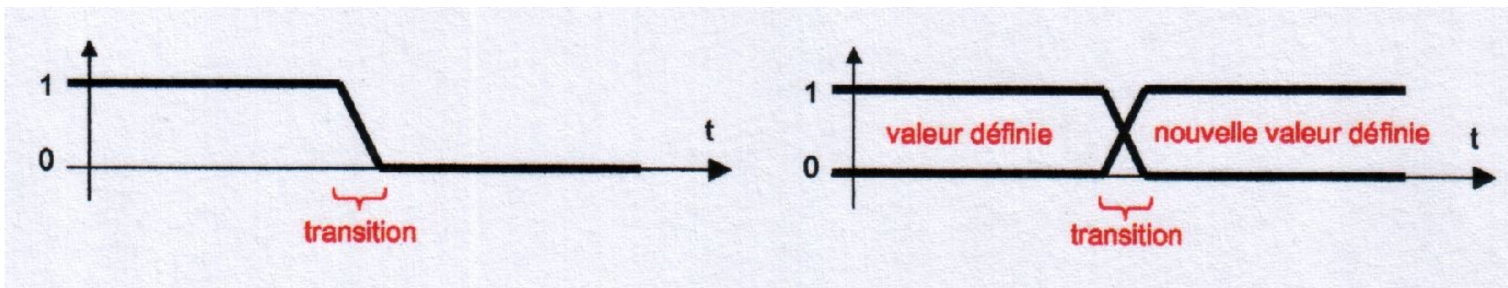
- signaux logiques (logique positive)

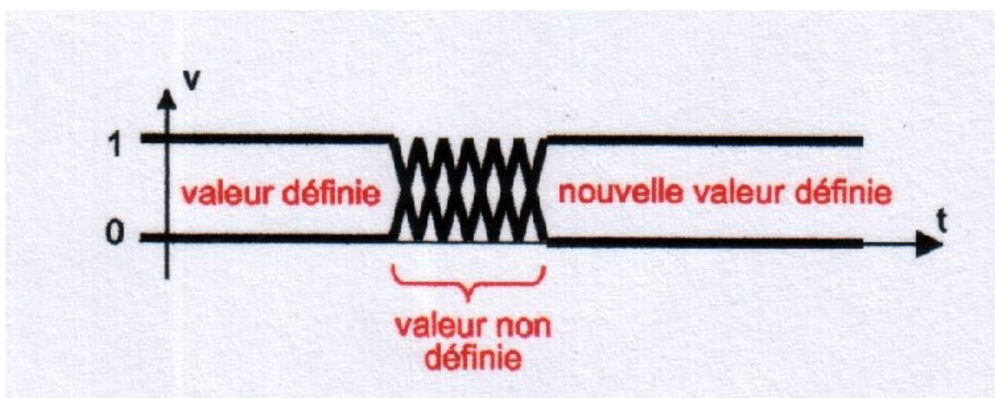


  - le niveau logique 0 représente une tension inférieure à un seuil bas
  - le niveau logique 1 représente une tension supérieure à un seuil haut

Représentation symbolique des signaux booléens

- Chronogrammes
  - pour les variations et les états des signaux logiques
    - transitions





opérateurs booléens

- fonctions booléennes sur des variables booléeenes
- définies par une table de vérité
  - donne le résultat de la fonction pour toutes les combinaisons des variables en entrée
- correspondent à des dispositifs électroniques (portes) qui permettent de réaliser ces fonctions
  - opérateurs de base
    - OU inclusif (OR)
    - ET (AND)
    - NON (NOT)
  - fonctions composées
    - NON OU (NOR), NON ET (NAND)
    - OU exclusif (XOR)

porte OU inclusif

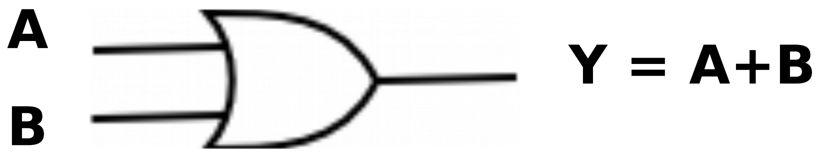
- "addition" de au moins 2 variables logiques
- notée : +
- vaut 1 si au moins une des variables en entrée vaut 1
- table de vérité

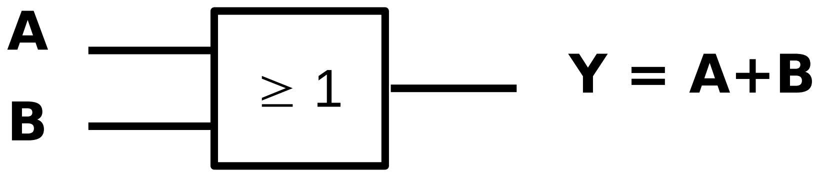
A	B	Y=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- associativité : (A+B)+C = A+(B+C)
- commutativité : A+B = B+A
- idempotence : A+A = A
- élément neutre : A+0 = A
- élément absorbant : A+1 = 1

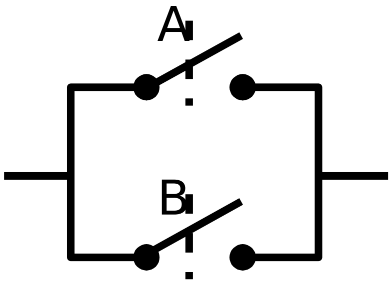
porte OU inclusif

- notation symbolique :





- implémentation
  - 2 interrupteurs en parallèle
- références :
  - TTL : SN7432
  - CMOS : CD4071B



porte ET

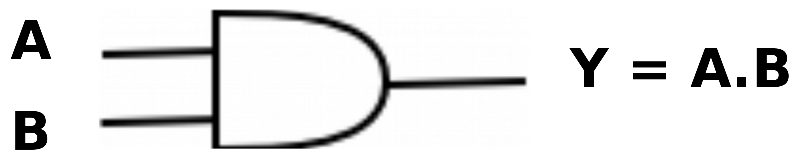
- "produit" logique, ou intersection, d'au moins 2 entrées
- notée .
- vaut 1 si et seulement si toutes les entrées valent 1
- table de vérité

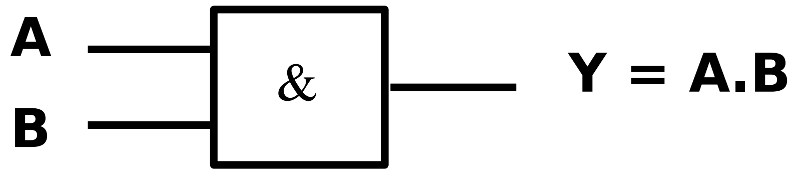
A	B	Y=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- associativité : (A.B).C = A.(B.C)
- commutativité : A.B = B.A
- idempotence : A.A = A
- élément neutre : A.1 = A
- élément absorbant : A.0 = 0

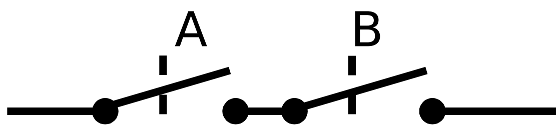
porte ET

- notation symbolique





- implémentation :
  - 2 interrupteurs en série



- références
  - TTL : SN7408
  - CMOS : CD4081B

propriétés des fonctions ET et OU

- les opérations OU et ET sont distributives l'une par rapport à l'autre

  A.(B+C) = A.B + A.C

  A+(B.C) = (A+B).(A+C)
- propriétés d'absorption

  A+(A.B) = A

  A.(A+B) = A

porte NON (inverseur)

- inverseur logique avec une entrée et une sortie
- notée $Y = \overline{A}$
- table de vérité

A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

$$\overline{\overline{A}} = A$$

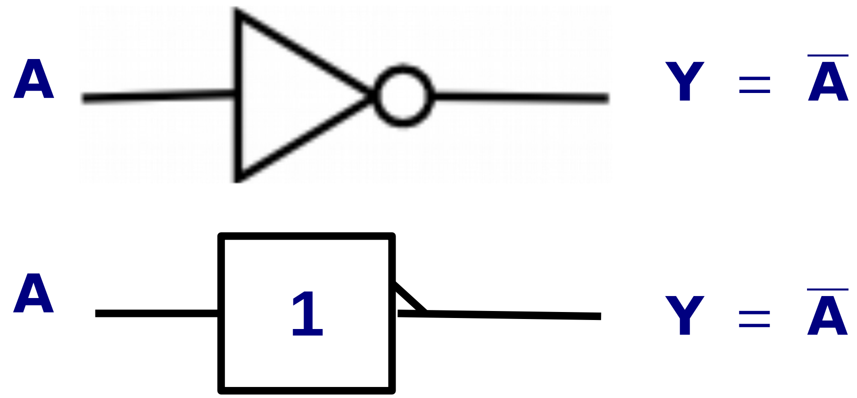
$$\overline{A} + A = 1$$

$$\overline{A} . A = 0$$

$$A + (\overline{A} . B) = A + B$$

porte NON

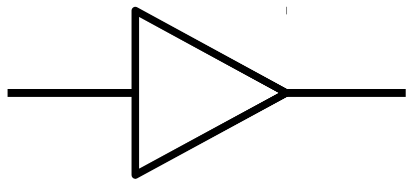
- notation symbolique



- références
  - TTL : SN7404
  - CMOS : CD4050B

porte BUFFER

- notation



- « inutile » du point de vue de la logique
  mais importante du point de vue de l'électronique pour adapter les impédances
  - distribuer un signal vers de nombreuses portes
  - fournir de la puissance

Théorèmes de De Morgan

- 1^{er} théorème

$$\overline{A.B.C...} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+...$$

- vérification du 1er théorème :
  - si toutes les entrées sont à 1, les 2 membres de l'équation sont nuls
  - si une au moins des entrées est à 0, les 2 membres de l'équation sont égaux à 1
- 2ème théorème

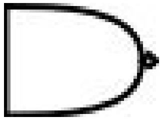
$$\overline{A+B+C+...} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}. ...$$

portes NON ET et NON OU

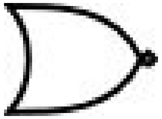
- NON ET est constituée d'un inverseur en sortie d'une porte ET
- NON OU est constituée d'un inverseur en sortie d'une porte OU
  - tables de vérité

A	B	$Y = \overline{A . B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$Y = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



TTL : SN7400
CMOS : CD4011B



TTL : SN7402
CMOS : CD4000B

porte OU exclusif

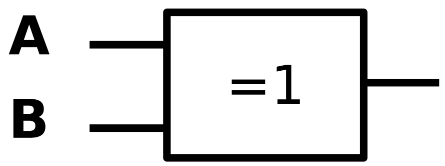
- vaut 1 si une entrée et une seule est à 1
- notée ⊕
- table de vérité

A	B	Y=A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

porte OU exclusif

- notation symbolique :

$Y = A \oplus B$

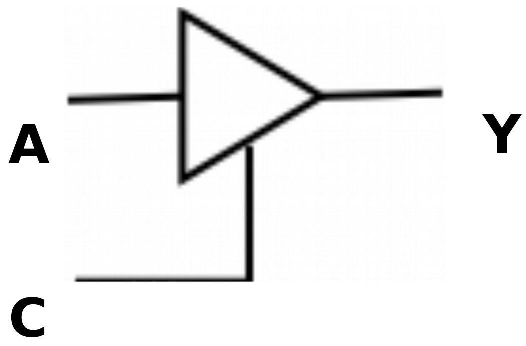


$Y = A \oplus B$

- références
  - TTL : SN7486
  - CMOS : CD4030B

porte à 3 états (tri-state)

- pas une porte logique à proprement parler
- utilisée pour une sortie sur une ligne commune à plusieurs circuits (un bus par exemple)
  - remplace généralement une porte ET, en évitant la mise en parallèle de plusieurs portes ET qui introduisent des capacités parasites

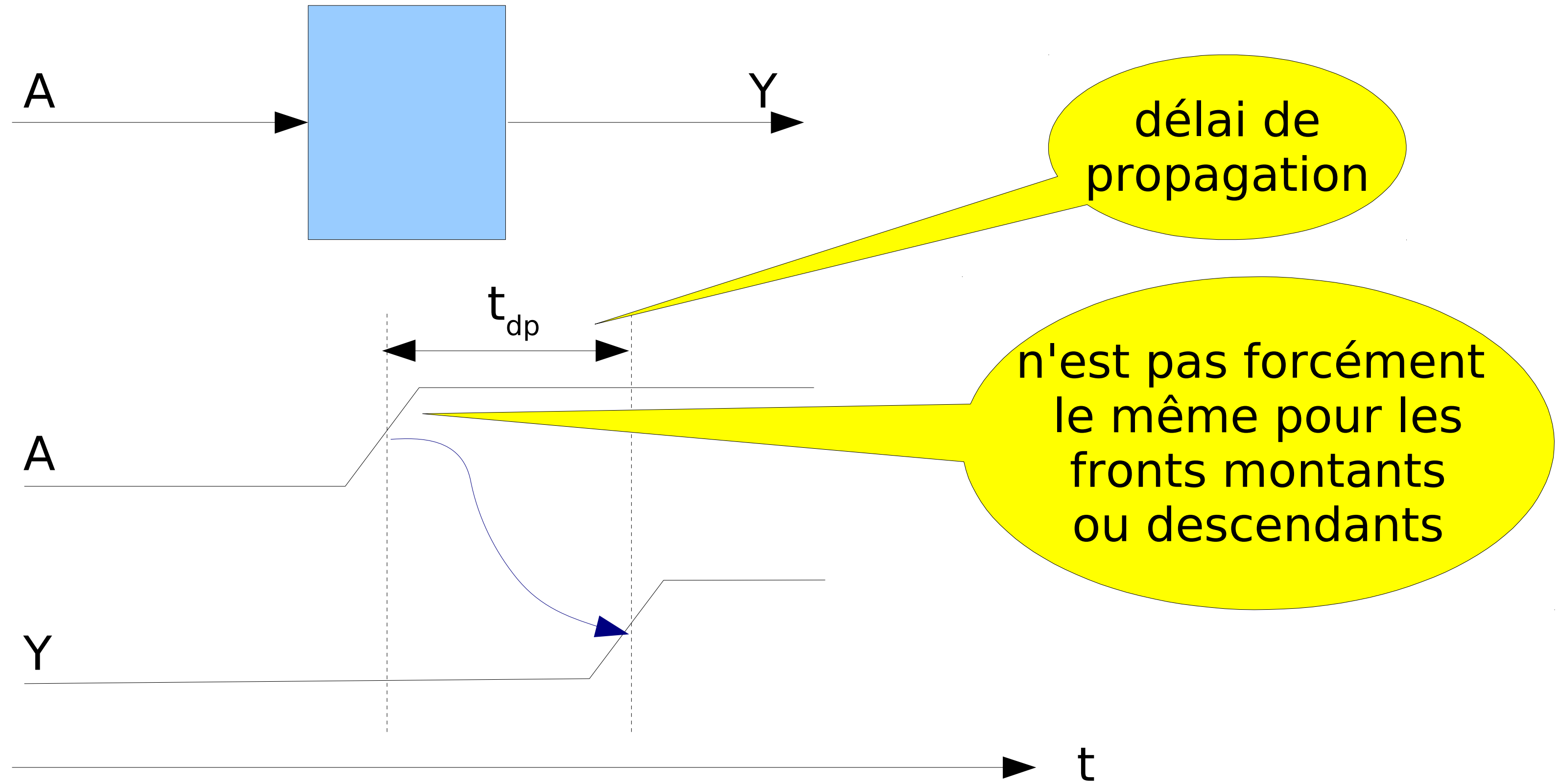


C	A	Y	sortie
1	0	0	faible impédance
1	1	1	faible impédance
0	X	Z	haute impédance

  - C=0 ⇒ impédance de sortie très grande et la sortie est pratiquement déconnectée

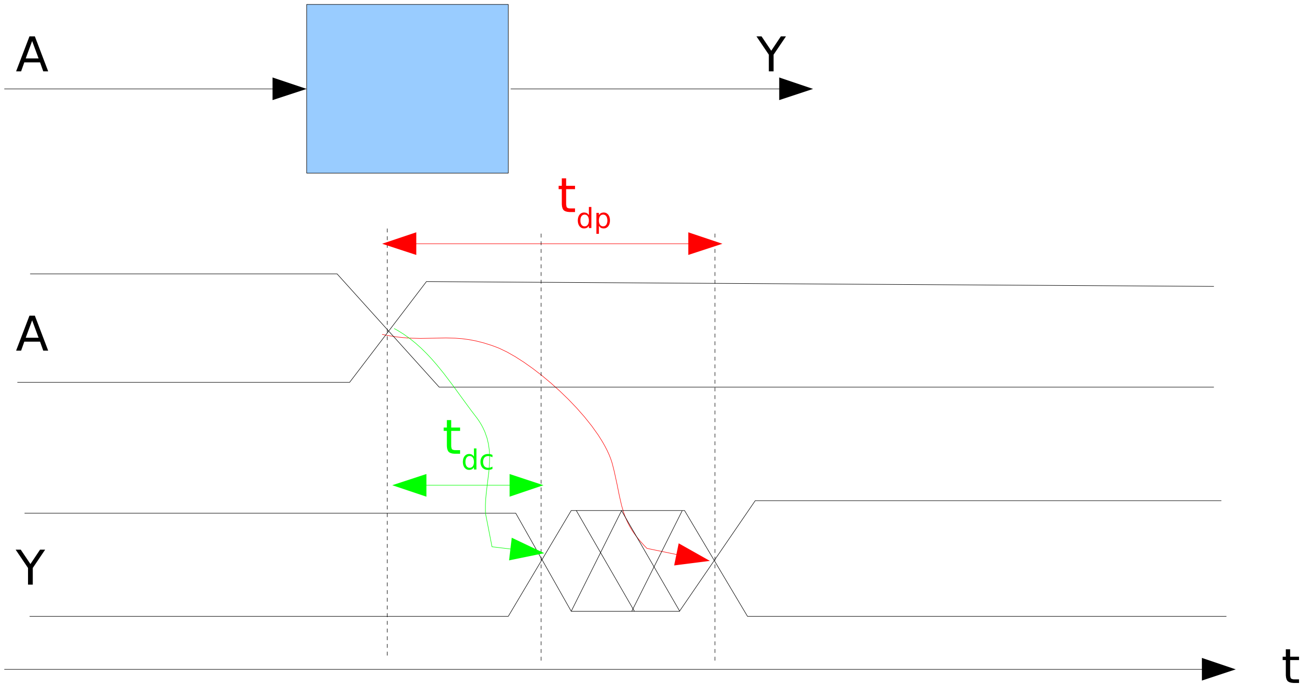
temps de réponse

- la réponse d'un circuit logique n'est pas instantanée
  - temps de migration des électrons libres ou des trous
  - caractéristiques du circuit (impédance complexe)



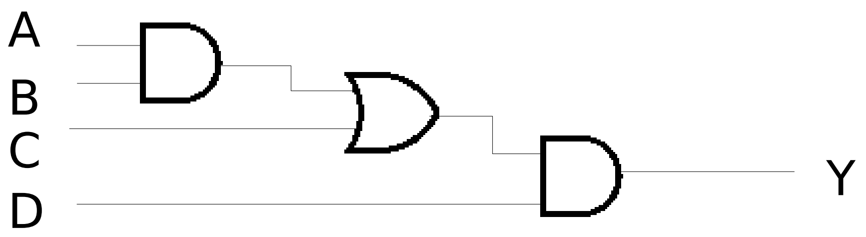
temps de réponse

- la réponse d'un circuit logique est caractérisée par
  - le délai de propagation tdp :
    temps maximum entre la modification du signal d'entrée et l'obtention d'un signal stable en sortie
  - le délai de contamination tdc :
    temps minimum entre la modification du signal d'entrée et le début de la modification du signal de sortie



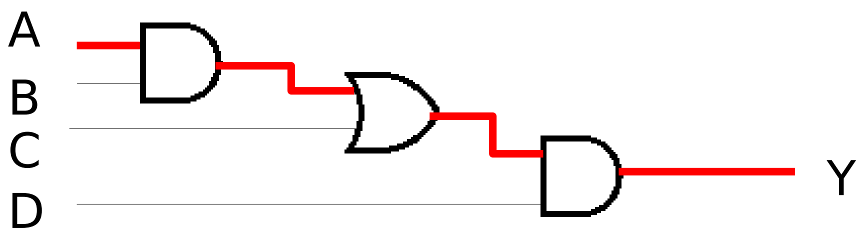
temps de réponse

- exemple



temps de réponse

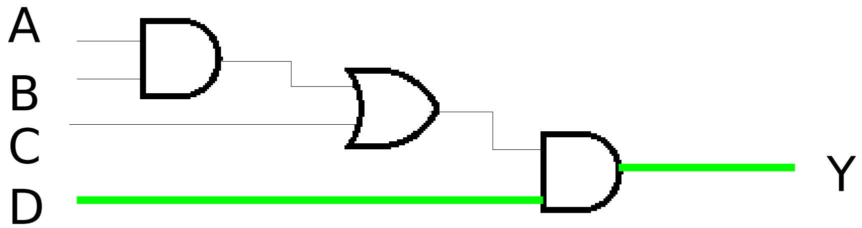
- exemple



  - chemin critique

temps de réponse

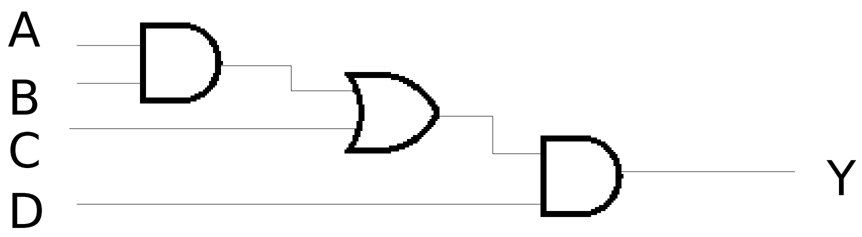
- exemple



  - chemin critique
  - chemin le plus court

temps de réponse

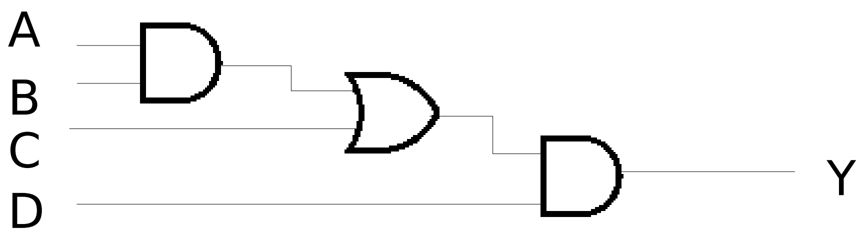
- exemple



  - chemin critique $t_{dp} = \sum \text{délais} = 2\,d_{ET} + d_{OU}$
  - chemin le plus court $t_{dc} = \sum \text{délais} = d_{ET}$

temps de réponse

- exemple



  - chemin critique $t_{dp} = \sum \text{délais} = 2\,d_{ET} + d_{OU}$
  - chemin le plus court $t_{dc} = \sum \text{délais} = d_{ET}$

- valeurs typiques
  - porte NON : 30 ps
  - porte ET à 2 entrées : 60 ps
  - porte ET à 3 entrées : 80 ps
  - porte ET à 4 entrées : 90 ps
  - porte à 3 états : 50 ps

Écriture algébrique d'une fonction logique

- à partir des portes logiques, on peut réaliser des fonctions complexes (logique combinatoire et logique séquentielle)
- l'algèbre de Boole nous permet de représenter ces fonctions avec des équations plus ou moins complexes
- on va voir comment écrire systématiquement ces fonctions
- et comment éventuellement simplifier ces écritures

Écritures canoniques d'une fonction logique

- Somme canonique de produits
- pour une fonction prenant en entrée n variables booléennes
  - 2^n combinaisons possibles des variables et de leurs inverses avec l'opérateur ET
  - à chaque combinaison correspond un produit logique C_j des variables qu'on appelle *minterm*
    - $0 \leq j \leq 2^n - 1$
    - j est le décimal équivalent au nombre binaire désigné par le minterm
  - exemple :
    - 2 variables binaires x et y
    - 4 combinaisons : $xy \quad x\bar{y} \quad \bar{x}y \quad \bar{x}\bar{y}$

      $11 \quad 10 \quad 01 \quad 00$
    - minterms $C_3 \quad C_2 \quad C_1 \quad C_0$

Écritures canoniques d'une fonction logique

				P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
C_i	x	y	z	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$xy\bar{z}$	xyz
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

P_i vaut 1 uniquement pour la combinaison C_i

Écritures canoniques d'une fonction logique

- Si on prend maintenant une fonction F de 3 variables binaires définie par sa table de vérité :

C_i	x	y	z	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Écritures canoniques d'une fonction logique

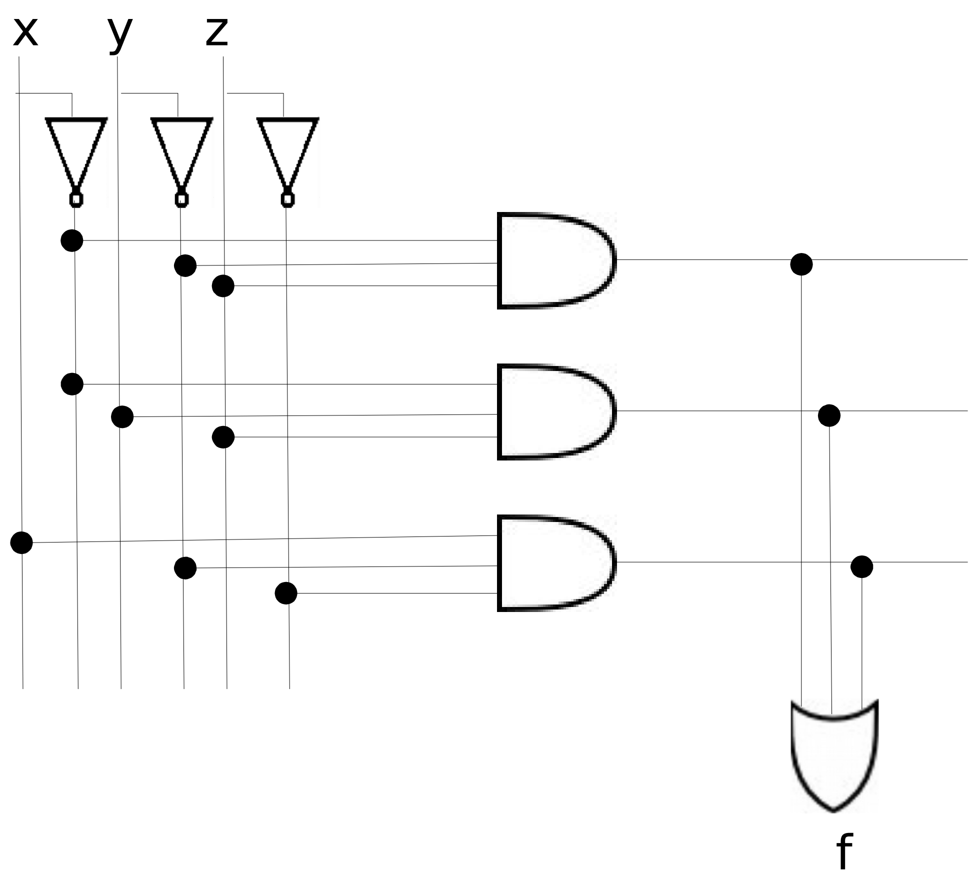
- Si on prend maintenant une fonction F de 3 variables binaires définie par sa table de vérité :

C_i	x	y	z	F	$P_1+P_3+P_4$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	0	0

$$F = P_1+P_3+P_4$$
$$= \overline{x}\,\overline{y}\,z+\overline{x}\,y\,z+x\,\overline{y}\,\overline{z}$$

Écritures canoniques d'une fonction logique

- implémentation de la fonction $F = \bar{x}\bar{y}z+\bar{x}yz+x\bar{y}\bar{z}$



Écritures canoniques d'une fonction logique

- Produits canoniques de sommes
  - on peut définir de façon analogues les 2n sommes logiques ou maxterms de n variables logiques

				S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
C_i	x	y	z	$x+y+z$	$x+y+\bar{z}$	$x+\bar{y}+z$	$x+\bar{y}+\bar{z}$	$\bar{x}+y+z$	$\bar{x}+y+\bar{z}$	$\bar{x}+\bar{y}+z$	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

$$F = S_0.S_2.S_5.S_6 S_7$$
$$= (x+y+z).(x+\bar{y}+z).(\bar{x}+y+\bar{z}).(\bar{x}+\bar{y}+z).(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$$

Simplification de l'écriture des fonctions

- Simplification = trouver une forme plus condensée
  - moins d'opérateurs
  - implémentation plus compacte
- Simplification algébrique
  - à partir de la table de vérité
  - écriture sous la forme canonique somme de produits
  - éventuellement simplification
    - chance et astuce

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned} F &= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz \\ &= \left(\bar{x}yz + xyz\right) + \left(x\bar{y}z + xyz\right) + \left(xy\bar{z} + xyz\right) \\ &= yz\left(x + \bar{x}\right) + xz\left(y + \bar{y}\right) + xy\left(z + \bar{z}\right) \\ &= xy + yz + zx \end{aligned}$$

Simplification de l'écriture des fonctions

- Tableaux de Karnaugh
  - représentation compacte des fonctions logiques
  - principe de la représentation :
    - partitionner les n variables en 2 groupes de taille p et q
      - p = q = n/2 si n est pair
      - p = (n+1)/2 et q = (n-1)/2 si n est impair
    - remplir le tableau (2p lignes et 2q colonnes) : à chaque ligne (resp. colonne) on associe une combinaison de p (resp. q) variables en affectant les combinaisons dans l'ordre binaire réfléchi (code GRAY) et on indique dans la case la valeur de la fonction

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple
  - fonction à 4 variables F(x,y,z,t)

xy zt	00	01	11	10
00				
01			1101	
11				
10				

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple
  - fonction à 4 variables F(x,y,z,t)

xy / zt	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

– la case rouge correspond au minterm

$x\,y\,\bar{z}\,t$

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple
  - fonction à 4 variables F(x,y,z,t)

zt \ xy	00	01	11	10
00			**x**	
01		**x**		**x**
11			**x**	
10				

– ses voisins sont marqués par les croix

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple
  - fonction à 4 variables F(x,y,z,t)

zt \ xy	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

– la case rouge correspond au minterm $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple
  - fonction à 4 variables F(x,y,z,t)

zt \ xy	00	01	11	10
00		**x**		**x**
01	**x**			
11				
10	**x**			

– ses voisins sont marqués par les croix : la structure est cyclique

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple
  - fonction à 4 variables F(x,y,z,t)

zt \ xy	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

– la case rouge correspond au minterm $x y \bar{z} \bar{t}$

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple
  - fonction à 4 variables F(x,y,z,t)

zt \ xy	00	01	11	10
00		**x**		**x**
01			**x**	
11				
10			**x**	

– ses voisins sont marqués par les croix

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple
  - fonction à 5 variables F(x,y,z,t,u)

xyz tu	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

  - la case rouge correspond au minterm $x\bar{y}z\bar{t}u$

Simplification de l'écriture des fonctions

- exemple
  - fonction à 5 variables F(x,y,z,t,u)

xyz / tu	000	001	011	010	110	111	101	100
00							**x**	
01		**x**				**x**		**x**
11							**x**	
10								

  - la case rouge correspond au minterm $x\bar{y}z\bar{t}u$
  - ses voisins sont marqués par les croix (il faut replier la structure autour de l'axe de symétrie entre les colonnes 010 et 110)

Simplification de l'écriture des fonctions

- méthode de simplification de Karnaugh :
  - repose sur l'identité $(A.B)+(A.\overline{B}) \;=\; A.(B+\overline{B})=A$
  - rassembler les cases adjacentes contenant des 1 par groupes de 2, 4 ou 8 termes
    - entre 2 cases adjacentes, une seule variable change
    - une même variable peut être utilisée plusieurs fois (x+x = x)

z \ xy	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

$$G \;=\; xyz+xy\bar{z}$$
$$=\; xy(z+\bar{z})$$
$$=\; xy$$

F = xy + yz + xz

Simplification de l'écriture des fonctions

- autre exemple :

x	y	z	t	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

zt \ xy	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11				1
10	1			1

$$F = x\bar{y} + \bar{y}\bar{t} + y\bar{z}t$$

à suivre...

Logique combinatoire