Chapitre I - Algèbre de Boole

I.1. Introduction :

Un circuit électrique, pneumatique, hydraulique peut avoir 2 états logiques. Ces états peuvent prendre les valeurs 1 ou 0. C'est ce que l'on appelle la **variable logique**. Ces états sont fonctions de l'état des composants en série dans le circuit.

- ***État 0 :*** Les actionneurs tels que : moteurs, vérins sont à l'état 0 lorsqu'ils ne sont pas alimentés. Le circuit est alors ouvert. Pour un circuit pneumatique ceci correspond à une absence de pression. Pour un circuit électrique cela correspond à une absence de différence de potentiel entre les bornes du circuit. Pour un contact ou un distributeur, c'est l'absence d'action physique intervenant sur un contact qui représente l'état 0.
- ***État 1 :*** Les actionneurs sont à l'état 1 lorsqu'ils sont alimentés. Pour un circuit pneumatique ou hydraulique ceci correspond à une pression d'air ou d'huile dans le circuit. Pour un circuit électrique cela correspond à une différence de potentiel entre les bornes du circuit. Pour un contact ou un distributeur ils sont actionnés, c'est à dire qu'une action physique est prise en compte.

Il existe 2 types de logique :

- la logique *« positive »* : le oui est représenté par un 1, et le non par un 0.
- la logique *« négative »* : le oui est représenté par un 0, et le non par un 1.

On dispose pour traiter l'information :

- d'un outil mathématique : l'algèbre de Boole, son rôle est de mettre en équation le fonctionnement d'un système, et de le simplifier en vue de sa réalisation physique.
- d'un outil physique : les portes logiques NON -NO-, ET -AND-, OU -OR-, ..., fonctions de base « pré-câblées » permettant la fabrication du circuit électrique, pneumatique, ou hydraulique demandé.

I.2. Fonctions logiques :

A- Définition :

On appelle **fonction logique** (ou booléenne) une fonction définie sur 2^n combinaisons de n variables logiques.

- Une fonction logique est donc une fonction de n variables logiques,
- Une fonction logique peut prendre en sortie 2 valeurs notées 0 et 1.

Exemple -voir Fig 1-:

La lampe possède 2 états : allumée -1-, ou éteinte -0-. Cet état est fonction de la position -ouvert 0 ou fermé 1- des différents interrupteurs, a, b et c.

- Les interrupteurs sont les variables logiques. Il y a donc 1 variable -Fig 1.1-, 2 variables -Fig 1.2-, ou 3variables -Fig 1.3- logiques.
- le résultat de la fonction logique est l'état de la lampe, qui possède bien 2 valeurs : allumée -1- ou éteinte -0-.

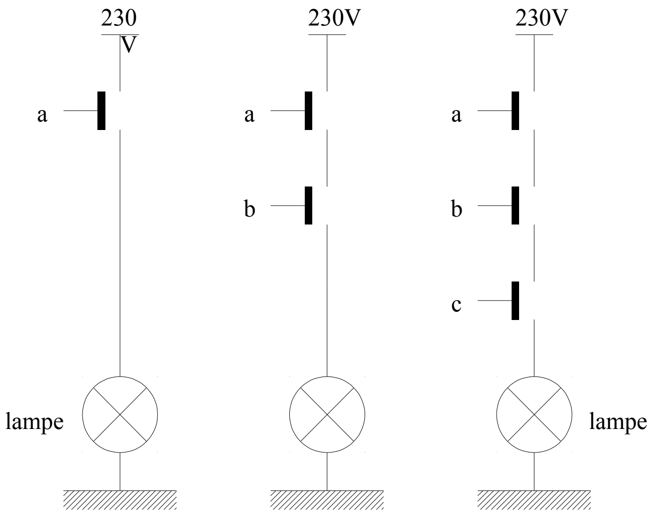

Fig 1 : Fonction logique allumer ou éteindre une lampe.

Une fonction logique peut être représentée par une table donnant pour toutes les combinaisons des états des variables, l'état correspondante de la fonction. Elle comporte 2^n lignes -ou n est le nombre de variable-, dans l'ordre binaire naturel. Cette table est appelée **table de vérité**. Cette table peut être

- totalement définie, cad que l'état de la sortie est parfaitement connue en fonction des variables d'entrées,
- incomplètement définie, cad qu'il existe des états de sortie dits indéterminés, ils traduisent en générale une impossibilité physique. Ils sont notés X dans la table de vérité.

Application -voir Fig 1-:

- Fig 1.1 :
  - nombre de variable logique : 1
  - nombre combinaison pour la fonction de sortie : $2^1 = 2$ états possibles.
  - table de vérité :

a	***f***
0	0
1	1

- Fig 1.2 :
  - nombre de variable logique : 2
  - nombre combinaison pour la fonction de sortie : $2^2 = 4$ états possibles.
  - table de vérité :

a	***b***	***f***
0	0	0
0	1	0

a	***b***	***f***
1	0	0
1	1	1

- Fig 1.3 :
  - nombre de variable logique : 3
  - nombre combinaison pour la fonction de sortie : $2^3 = 8$ états possibles.
  - table de vérité :

a	***b***	***c***	***f***	***f'***
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	X
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	X
1	1	1	1	1

  - Fonction incomplètement définie : f'.

B- Fonctions logiques de base :

Il existe 4 fonctions logiques de base

- la fonction **NON** : $f = \overline{a}$

a	***f***
0	*1*
1	0

- la fonction **ET** : $f = a.b$

a	***b***	***f***	$\overline{f}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0
		ET -AND-	Non ET -NAND-

– la fonction **OU** « inclusif » : $f = a+b$

a	***b***	***f***	$\overline{f}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0
		OU -OR-	Non OU -NOR-

– la fonction **OU EXCLUSIF** : $f = a \oplus b$

a	***b***	***f***	$\overline{f}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
		XOR	Non XOR

- Applications du OU EXCLUSIF
  - f : c'est un comparateur de différence ou clé d'imparité. La fonction f prend la valeur 1 si le nombre de 1 est impaire -a≠b-, 0 sinon -a=b-.
  - $\overline{f}$: c'est un comparateur d'identité. La fonction $\overline{f}$ prend la valeur 1 si a=b, 0 sinon -a≠b-.

Comparaison entre la logique positive et négative :

positive	***négative***
0	1
1	0
NON	NON
OU	ET
ET	OU

I.3. Règles de l'algèbre de Boole :

A- Lois de fermeture :

- a.b = a ET b = variable booléenne définie par la table de vérité de la fonction ET.
- a+b = a OU b = variable booléenne définie par la table de vérité de la fonction OU.

B- Lois de commutativité :

- a.b = b.a

- a+b = b+a

C- Lois d'associativité :

- a.(b.c) = (a.b).c
- a+(b+c) = (a+b)+c

D- Lois d'idempotence :

- a.a = a
- a+a = a

E- Lois de complémentarité :

- $a.\overline{a}=0$
- $a+\overline{a}=1$

F- Lois d'identité remarquable :

- 1.a = a 1+a = 1
- 0.a = 0 0+a = a

G- Lois de distributivité :

- a.(b+c) = a.b + a.c
- a+(b.c) = (a+b).(a+c)

H- Lois de distributivité « *interne* » :

- a.b.c = (a.b).(a.c)
- a+(b+c) = (a+b)+(a+c) car a = a+a+a+a+...

G- Exemples :

- $x.y+x.\overline{y}=x$ $(x+y).(x+\overline{y})=x$
- x + x.y = x x.(x+y) = x
- $x+\overline{x}.y=x+y$ $x.(\overline{x}+y)=x.y$
- $x.y+\overline{x}.z+y.z=x.y+\overline{x}.z$ $(x+y).(\overline{x}+z)+(y+z)=(x+y).(\overline{x}+z)$
- $x.y+x.\overline{y}.z=x.y+x.z$ $(x+y).(x+\overline{y}+z)=(x+y).(x+z)$

H – Théorème de De Morgan (Augustus) :

- $\overline{a.b.c}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$

– $\overline{a+b+c}=\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$

I.4. Représentation des fonctions logiques :

A- Écriture algébrique :

On veut utiliser un OU à 4 entrées et 4 ET à 3 entrées. On se propose de simplifier la fonction logique $f=x.y.\overline{z}+x.\overline{y}.z+\overline{x}.y.z+x.y.z$

$$f=x.y.\overline{z}+x.\overline{y}.z+\overline{x}.y.z+x.y.z$$
$$f=x.y.\overline{z}+x.y.z+x.\overline{y}.z+\overline{x}.y.z$$
$$f=x.y.\overline{z}+x.y.z+x.\overline{y}.z+x.y.z+\overline{x}.y.z+x.y.z$$
$$f=x.y.(z+\overline{z})+x.(\overline{y}+y).z+(\overline{x}+x).y.z$$
$$f=x.y+x.z+y.z$$

B- Écriture par table de vérité :

La fonction vaut 1 si le nombre de 1 est supérieur au nombre de 0.

a	***b***	***c***	***f***	$\overline{f}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Tableau 1 : nombre de 1 > au nombre de 0.

I.5. Forme canonique :

A- Définition :

c'est l'écriture algébrique de la fonction logique sous la forme de :

- somme de produit, **première** forme canonique,
- produit de somme, **deuxième** forme canonique,
- de portes NAND, **troisième** forme canonique,
- de portes NOR, **quatrième** forme canonique.

B- Applications :

Si on reprend la fonction du Tableau 1, on peut écrire :

- **première forme canonique**, on recherche les combinaisons des variables logiques sous la forme de somme de produit qui amènent la fonction logique à la valeur 1,

$f=1 \ si \ f=\bar{a}.b.c+a.\bar{b}.c+a.b.\bar{c}+a.b.c$.

- **deuxième forme canonique**, on recherche les combinaisons des variables logiques sous la forme de produit de somme qui amènent la fonction logique à la valeur 0, $f=0 \ si \ f=(a+b+c).(a+b+\bar{c}).(a+\bar{b}+c).(\bar{a}+b+c)$.

a	***b***	***c***	***1ère forme appliquée à f=0***	***2ème forme***
0	0	0	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$	a+b+c
0	0	1	$\bar{a}.\bar{b}.c$	$a+b+\bar{c}$
0	1	0	$\bar{a}.b.\bar{c}$	$a+\bar{b}+c$
1	0	0	$a.\bar{b}.\bar{c}$	$\bar{a}+b+c$

- **troisième forme canonique**, on utilise la première forme canonique mais ici les fonctions logiques sont exprimées à l'aide UNIQUEMENT de portes NAND.
$$f=\overline{\overline{\bar{a}.b.c+a.\bar{b}.c+a.b.\bar{c}+a.b.c}}$$
$$f=\overline{\overline{(\bar{a}.b.c)}.\overline{(a.\bar{b}.c)}.\overline{(a.b.\bar{c}+a.b.c)}}$$.

- **quatrième forme canonique**, on utilise la deuxième forme canonique mais ici les fonctions logiques sont exprimées à l'aide UNIQUEMENT de portes NOR
$$f=\overline{\overline{(a+b+c).(a+b+\bar{c}).(a+\bar{b}+c).(\bar{a}+b+c)}}$$
$$f=\overline{\overline{(a+b+c)}+\overline{(a+b+\bar{c})}+\overline{(a+\bar{b}+c)}+\overline{(\bar{a}+b+c)}}$$.

I.6. Simplification des fonctions logiques :

Il existe 2 manières de simplifier les fonctions logiques, par :

- l'algèbre de Boole,
- le tableau de Karnaugh.

A- Algèbre de Boole :

Pour simplifier une fonction logique, on utilise les règles énoncées au paragraphe I.3, et en particulier les règles d'idempotence et de complémentarité
$$f=\bar{a}.b.c+a.\bar{b}.c+a.b.\bar{c}+a.b.c$$
$$f=\bar{a}.b.c+a.\bar{b}.c+a.b.\bar{c}+a.b.c+a.b.c+a.b.c$$
$$f=b.c.(\bar{a}+a)+a.c.(\bar{b}+b)+a.b.(\bar{c}+c)$$.
$$f=b.c+a.c+a.b$$

B- Tableau de Karnaugh :

C'est une méthode graphique de simplification d'une fonction logique. On utilise pour cela :

- la fonction logique sous sa forme de somme de monômes,
- la règle de simplification de complémentarité,
- les monômes qui amènent la fonction logique à la valeur 1,
- des monômes adjacents : cad des monômes qui sont topologiquement proches.

La représentation se fait sous forme de tableau comme ceux données ci-dessous :

- Fonction de 2 variables : dans ce cas la fonction possède 2 variables, le tableau à donc 4 cases

	$\bar{a}$ **0**	***a*** **1**
$\bar{b}$ 0	$\bar{a}.\bar{b}$	$a.\bar{b}$
b 1	$\bar{a}.b$	a.b

- Fonction de 3 variables : on a ici 8 monômes possibles (8 cases).

	$\bar{a}.\bar{b}$ **0 0**	$\bar{a}.b$ **0 1**	***a.b*** **1 1**	$a.\bar{b}$ **1 0**
$\bar{c}$ 0	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$	$\bar{a}.b.\bar{c}$	$a.b.\bar{c}$	$a.\bar{b}.\bar{c}$
c 1	$\bar{a}.\bar{b}.c$	$\bar{a}.b.c$	a.b.c	$a.\bar{b}.c$

- Fonction de 4 variables : 16 monômes.

	$\bar{a}.\bar{b}$ **0 0**	$\bar{a}.b$ **0 1**	***a.b*** **1 1**	$a.\bar{b}$ **1 0**
$\bar{c}.\bar{d}$ 0 0	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$	$\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d}$	$a.b.\bar{c}.\bar{d}$	$a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$
$\bar{c}.d$ 1 0	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d$	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$	$a.b.\bar{c}.d$	$a.\bar{b}.\bar{c}.d$
c.d 1 1	$\bar{a}.\bar{b}.c.d$	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$	a.b.c.d	$a.\bar{b}.c.d$
$c.\bar{d}$ 0 1	$\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}$	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$	$a.b.c.\bar{d}$	$a.\bar{b}.c.\bar{d}$

- Fonction de 5 variables : utilise ici en général 2 tableaux de 16 monômes

	$\bar{a}.\bar{b}$ **0 0**	$\bar{a}.b$ **0 1**	***a.b*** **1 1**	$a.\bar{b}$ **1 0**
$\bar{c}.\bar{d}$ 0 0	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$	$\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d}$	$a.b.\bar{c}.\bar{d}$	$a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$
$\bar{c}.d$ 1 0	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d$	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$	$a.b.\bar{c}.d$	$a.\bar{b}.\bar{c}.d$
c.d 1 1	$\bar{a}.\bar{b}.c.d$	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$	a.b.c.d	$a.\bar{b}.c.d$
$c.\bar{d}$ 0 1	$\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}$	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$	$a.b.c.\bar{d}$	$a.\bar{b}.c.\bar{d}$

Pour ce tableau on pose e=0

	$\bar{a}.\bar{b}$ **0 0**	$\bar{a}.b$ **0 1**	***a.b*** **1 1**	$a.\bar{b}$ **1 0**
$\bar{c}.\bar{d}$ 0 0	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$	$\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d}$	$a.b.\bar{c}.\bar{d}$	$a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$
$\bar{c}.d$ 1 0	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d$	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$	$a.b.\bar{c}.d$	$a.\bar{b}.\bar{c}.d$
c.d 1 1	$\bar{a}.\bar{b}.c.d$	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$	a.b.c.d	$a.\bar{b}.c.d$

	$\bar{a}.\bar{b}$ **0 0**	$\bar{a}.b$ **0 1**	**a.b** **1 1**	$a.\bar{b}$ **1 0**
$c.\bar{d}$ 0 1	$\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}$	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$	$a.b.c.\bar{d}$	$a.\bar{b}.c.\bar{d}$

Et pour celui-ci on pose e=1

1- Principe de simplification du tableau de Karnaugh :

- Étape 1 : on utilise la table de vérité de la fonction logique comme brique initiale.

a	***b***	***c***	***f***	$\bar{f}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

- Étape 2 : à partir de cette table, on fabrique le tableau de Karnaugh correspondant. Pour cela, on part de la valeur 1 de la fonction logique et on cherche tous les monômes correspondant

	$\bar{a}.\bar{b}$ **0 0**	$\bar{a}.b$ **0 1**	**a.b** **1 1**	$a.\bar{b}$ **1 0**
$\bar{c}$ 0			$a.b.\bar{c}$	
c 1		$\bar{a}.b.c$	a.b.c	$a.\bar{b}.c$

- Étape 3 : on procède à la simplification entre les monômes adjacents 2 à 2 (au minimum).
  1- $\bar{a}.b.c+a.b.c=(\bar{a}+a).b.c=b.c$
  2- $a.b.\bar{c}+a.b.c=a.b.(\bar{c}+c)=a.b$
  3- $a.b.c+a.\bar{b}.c=a.(b+\bar{b}).c=a.c$
  La fonction simplifiée est la somme des monômes simplifiés cad f = b.c + a.b + a.c

2- Règles de simplifications :

1. Au lieu d'écrire les monômes on met des 1
2. Le nombre possible de cases à regrouper est 2^n, cad , 2, 4, 8, 16, ...
3. Il faut essayer de faire des groupes les plus grands possibles.
4. Toutes les cases contenant des 1 doivent être utilisées au moins une fois.
5. Construire le plus petit nombre de groupement compatible avec ce qui précède.
6. Ne pas inclure une case plusieurs fois sauf si cela permet de réaliser un groupement plus important.

Remarque : le tableau de Karnaugh doit être considéré comme une surface fermée.

cd \ ab	***0 0***	***0 1***	***1 1***	***1 0***
0 0	1			1

cd \ ab	*0 0*	*0 1*	*1 1*	*1 0*
1 0		1	1	
1 1		1	1	
0 1	1			1

3- Fonctions incomplètement définies :

cd \ ab	*0 0*	*0 1*	*1 1*	*1 0*
0 0	1			1
1 0	X [1]	1	1	1
1 1			X [1]	1
0 1	1			1

Sur le tableau précédant on peut fabriquer des groupements de taille supérieure en considérant que les valeurs inconnues -représentées par des X- peuvent avoir la valeur 1. On a donc 3 groupements de 4 cases au lieu de 3 groupements de 4 et 2x2 cases.

4- Conclusion :

- Fonctions à 4 variables : si on peut faire un groupement de
  - 16 cases, la fonction f vaut toujours 1,
  - 8 cases, le monôme résultant n'est composé que d'un seul facteur,
  - 4 cases, 2 facteurs,
  - 2 cases, 3 facteurs,
  - 1 case, 4 facteurs.
- Fonctions à 3 variables : si on peut faire un groupement de
  - 8 cases, la fonction f vaut toujours 1,
  - 4 cases, le monôme résultant n'est composé que d'un seul facteur,
  - 2 cases, 2 facteurs,
  - 1 case, 3 facteurs.

Il est parfaitement possible de refaire tous ce qui vient d'être énoncé en remplaçant la fonction de somme de produit par un produit de somme (deuxième forme canonique), on considère alors non plus les monômes correspondant aux 1 de la fonction mais aux 0.
exemple :

$$f=0 \ si \ f=(a+b+c).(a+\bar{b}+\bar{c}).(\bar{a}+b+c).(\bar{a}+\bar{\bar{b}}+c)$$

c \ ab	*0 0*	*0 1*	*1 1*	*1 0*
0	0		0	0
1		0		

La fonction après simplification devient $f=(\bar{b}+\bar{c}).(a+\bar{c}).(a+\bar{b}+\bar{c})$.