Théorème de Pythagore et sa réciproque

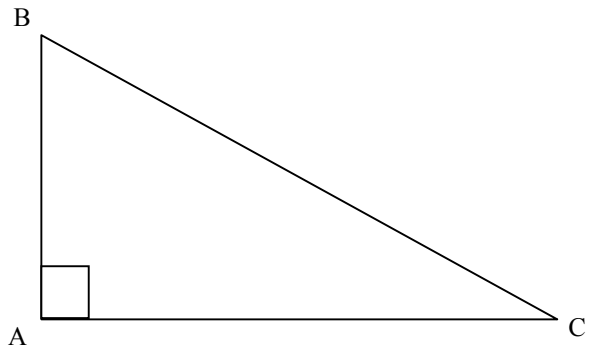
- *Le côté le plus long dans un triangle rectangle est l'hypoténuse : c'est le côté où il n'y a pas d'angle droit.*
- *Le théorème de Pythagore dit :« Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. »*
- *La réciproque du théorème de Pythagore dit : « Si dans un triangle, le carré du côté le plus long est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle. »*

1. Théorème de Pythagore :

a. Théorème de Pythagore

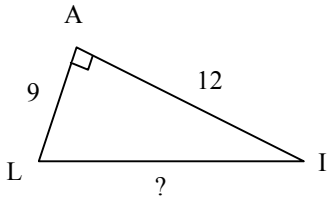
Si le triangle ABC est rectangle en A

alors $BC^2=AB^2+AC^2$.



b. Exemples d'utilisation du théorème de Pythagore.

On connaît 2 côtés du triangle rectangle, il permet de calculer la longueur du troisième côté.



Le triangle ALI est rectangle en A.
Son hypoténuse est [IL].
L'énoncé de Pythagore permet d'écrire :

$IL^2 = AI^2 + AL^2$

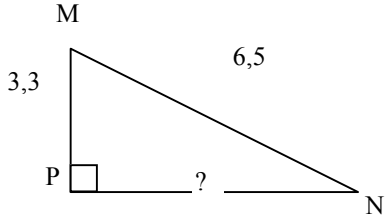
D'après les données, on a:

AI=12 et AL=9

donc $IL^2 = 144+81$

$= 225$

donc $IL = \sqrt{225} = 15$ cm



Le triangle MNP est rectangle en P.
Son hypoténuse est [MN].
L'énoncé de Pythagore permet d'écrire :

$MN^2 = MP^2 + PN^2$

D'après les données, on a:

MN=6,5 et MP=3,3

donc $6,5^2 = 3,3^2+PN^2$

$42,25= 10,89+PN^2$

on a $PN^2 = 42,25-10,89$

$= 31,36$

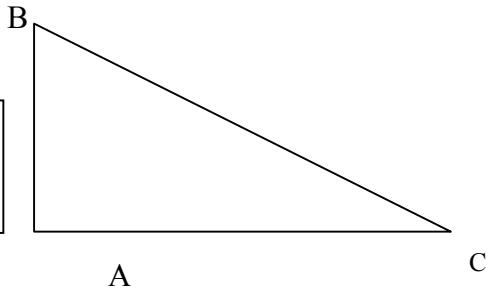
donc $PN^2 = \sqrt{31,36} = 5,6$ cm

2. Réciproque du théorème de Pythagore

a. Enoncé de la réciproque du théorème de Pythagore :

Si le triangle ABC est tel que $BC^2=AB^2+AC^2$

Alors il est rectangle en A.

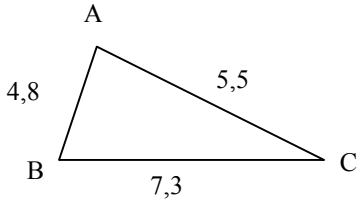


b. Méthode : Savoir si un triangle est rectangle ou non.

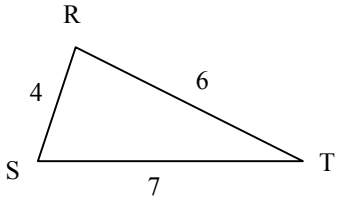
On donne les longueurs des 3 côtés d'un triangle ABC, le triangle est-il rectangle ?

i) On repère le côté le plus long et on calcule le carré de sa longueur.
ii) On calcule la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
iii) S'il y a égalité, la réciproque permet d'affirmer que le triangle est rectangle. S'il y a inégalité, le triangle n'est pas rectangle.

c. Exemples rédigés : Les triangles suivants sont-ils rectangles ?

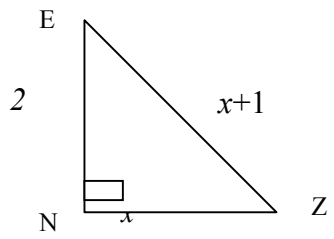


[BC] est le plus grand côté.
On calcule $BC^2=7,3^2 = 53,29$.
On calcule $AB^2+AC^2 = 4,8^2 +5,5^2 = 53,29$
On compare : on a l'égalité $BC^2 =AB^2 +AC^2$
d'après la réciproque de l'énoncé de Pythagore,
<u>le triangle ABC est rectangle en A</u>.



i) [ST] est le plus grand côté.
ii) On calcule $ST^2=7^2 = 49$.
On calcule $RS^2+RT^2 = 4^2 +6^2 = 52$
iii) On compare : on a $ST^2 \neq RS^2 +RT^2$
donc <u>le triangle RST n'est pas rectangle.</u>

Exercice 1 :
Sur la figure ci-dessous le triangle NEZ est rectangle en N. Les mesures des côtés sont données en centimètre. Quelle est la valeur de *x ?*

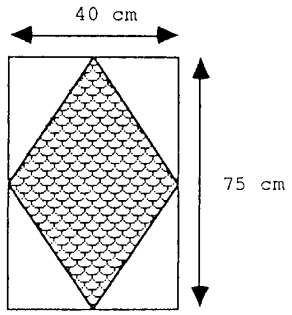


Exercice 2 :
ABC est un triangle rectangle en A ; x désigne un nombre positif ; BC = x + 7 ; AB = 5.
Exprimer en fonction de x la longueur AC.

Exercice 3 :
Calcule la longueur de la diagonale :
a) d'un carré ABCD de coté 5 cm ;
b) d'un rectangle EFGH de 7 cm sur 3 cm.

Exercice 4 :
Un rectangle IJKL a un côté de [IJ] de 5 cm et une diagonale [JL] de 13 cm.
Calculer la longueur du côté [JK] puis l'aire du rectangle.

Exercice 5 :



Un panneau d'une porte d'immeuble mesure 75 cm sur 40 cm. Il est décoré d'un losange en relief obtenu en joignant les milieux des côtés du panneau.
Combien mesurent les côtés du losange ?

Exercice 6:
Un funambule tend un fil entre deux poteaux qui ont pour hauteur 5m et 12m et qui sont à une distance de 24m l'un de l'autre. On suppose le fil bien tendu. Quelle est sa longueur ?

Exercice 7:
Un maçon appuie une échelle de 3m contre un mur vertical. Le bas de l'échelle est à 1m du mur sur le sol horizontal. Calculer une valeur approchée de la hauteur du sommet de l'échelle.

Exercice 8 :
Une échelle est appuyée contre un mur vertical. Le bas de l'échelle est à 1,20m du mur sur le sol horizontal. La hauteur du sommet de l'échelle (mesurée sur le mur vertical) est de 3,5m. Quelle est la longueur de cette échelle!?

Avec la calculatrice

1) Dans le triangle ABC, rectangle en A, calcule les longueurs inconnues.
Exprime les résultats sous forme d'un radical simplifié ou d'une fraction.

	|BC|	|AC|	|AB|		|BC|	|AC|	|AB|		|BC|	|AC|	|AB|
a	10	6	8	f		0,3	0,2	k		$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$
b	10		5	g	$\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$	l	$\sqrt{10}$	$\sqrt{6}$	
c	15	9		h		$\frac{8}{3}$	2	m	$\sqrt{12}$		$\sqrt{3}$
d		7	12	i	$\frac{12}{7}$		$\frac{5}{7}$	n		$3\sqrt{5}$	6
e	13		5	j		$\frac{12}{5}$	$\frac{9}{5}$	o	$3\sqrt{6}$	$\sqrt{22}$	

23) Dans chaque cas, détermine la nature du triangle ABC.

a) $|AB| = \sqrt{12}$ $|BC| = 2\sqrt{3}$ $|AC| = 5$

b) $|AB| = 2$ $|BC| = 2$ $|AC| = 2\sqrt{2}$

c) $|AB| = \sqrt{5}$ $|BC| = \sqrt{3}$ $|AC| = 2\sqrt{2}$

d) $|AB| = \sqrt{18}$ $|BC| = 3\sqrt{2}$ $|AC| = 6$

e) $|AB| = \sqrt{72}$ $|BC| = 6\sqrt{2}$ $|AC| = 3\sqrt{8}$

12) Réponds par vrai ou faux.

a) 2, 3 et 4 peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

b) $2\sqrt{3}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont la longueur des deux autres côtés est 3.

c) Si les côtés d'un carré mesurent 2 cm, alors sa diagonale mesure 8 cm.

d) Si la diagonale d'un rectangle mesure $4\sqrt{13}$ m et un de ses côtés 8 m, alors la longueur de ce rectangle est de 12 m.

e) Si la diagonale d'un carré mesure 4 cm, alors ses côtés mesurent $2\sqrt{2}$ cm.