5.2 L’épreuve de Pythagore

Tous les jeunes connaissent par cœur la formule du théorème de Pythagore, mais la comprennent-ils vraiment ? Pour les aider, cette activité propose d’analyser différentes preuves afin de comprendre le sens du théorème de Pythagore.

De plus, ils auront l’occasion de compléter différentes preuves, ce qui leur permettra de découvrir qu’il existe souvent plus d’une façon de démontrer un théorème.

Intentions de l’activité

- Leur faire comprendre le théorème de Pythagore en utilisant différentes preuves
- Pratiquer leur habileté à rédiger une preuve complète et rigoureuse

Forme de la production attendue

- Réflexion sur différentes preuves du théorème de Pythagore
- Rédaction de preuves

Concepts utilisés

- Théorème de Pythagore
- Congruence d’angles, de segments et de triangles
- Parallélisme
- Aire de triangles, de carrés et de trapèzes
- Isométries

Ressources matérielles

- Site Internet : *http://www.mathkang.org/swf/pythagore2.html*

Déroulement

Préparation

- Il serait opportun d'effectuer un rappel du théorème de Pythagore et des termes qui y sont associés : cathètes, hypoténuse, etc.
- Si le terme triplet pythagoricien n'est pas connu des élèves, faire une petite présentation sur le sujet.

Réalisation

- Les élèves auront à compléter des preuves du théorème de Pythagore. S'assurer que leurs preuves sont complètes et rigoureuses. Amenez-les à réfléchir à l'importance d'être structuré afin de bien se faire comprendre.

Intégration

- Dans la dernière partie de l'activité, l'élève sera amené à compléter des preuves courtes du théorème. Il sera un peu guidé dans sa démarche, mais moins que dans les preuves précédentes. Il devra trouver des équations qui lui permettront de retrouver la fameuse égalité.

Pistes de différenciation

- Une autre preuve est présentée dans l'annexe qui accompagne cette activité. Elle est plus difficile que les autres, mais les élèves très intéressés pourraient y trouver leur compte. La solution est dans l'annexe 2.
- Faire découvrir aux élèves d'autres preuves du théorème de Pythagore. Vous pouvez en trouver plusieurs sur Internet.
- Vous pouvez montrer la vidéo qui se trouve sur le site Internet : *http://www.mathkang.org/swf/pythagore2.html*. C'est une animation de la preuve se trouvant en annexe.

Nom : _____

5.2 L'épreuve de Pythagore

Depuis quelques années, tu utilises régulièrement le théorème de Pythagore. Tu connais son importance en géométrie et en trigonométrie. Savais-tu que ce théorème, déjà prouvé depuis l'Antiquité, est l'un de ceux qui ont toujours passionné et passionne toujours les mathématiciens ?

Laisse-toi emballer par cette « pythagoromanie » !

Lors de Show Math, vous avez pu apprécier quelques-unes des premières décimales du nombre π. Parmi ces décimales, on retrouve à la 351e position le chiffre des unités du nombre 367 précédé de 6 puis de 3. Le nombre 367 représente la quantité de preuves différentes recensées pour démontrer le théorème de Pythagore !

Ce théorème, qui est connu depuis l'Antiquité, est nommé d'après Pythagore de Samos, mathématicien, philosophe et astronome de la Grèce Antique. Il énonce que, dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes.

Ce théorème engendre des triplets pythagoriciens, par exemple 3 – 4 – 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

Trouvez-en d'autres.

1.

Pythagore de Samos

Outre la relation de Pythagore, trouvez au moins un autre lien entre les trois nombres d'un triplet pythagoricien.

2.

Une autre proposition de Pythagore

Cette dernière a été écrite en 500 av. J.-C. Cela fait donc plus de 2500 ans !

Soit un nombre impair qui représente la mesure du plus petit côté d'un triangle rectangle, prenons son carré. Si on lui soustrait 1 et qu'on divise le résultat par 2, on obtient la mesure du second côté qui forme l'angle droit du triangle rectangle. En augmentant cette dernière mesure de 1, on obtient la mesure de l'hypoténuse. Ces 3 nombres forment alors un triplet pythagoricien, c'est-à-dire un triplet de nombres naturels non nuls qui vérifie la relation de Pythagore.

Voyons un exemple pour mieux comprendre.

Si 5 est la mesure du plus petit côté du triangle rectangle, il faut le mettre au carré et lui soustraire 1.

$5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$

Il faut ensuite diviser le résultat obtenu par 2.

$\frac{24}{2} = 12$

Alors, 12 est la mesure de l'autre côté formant l'angle droit du triangle rectangle.

On ajoute 1 à 12 et on obtient la mesure de l'hypoténuse : 13.

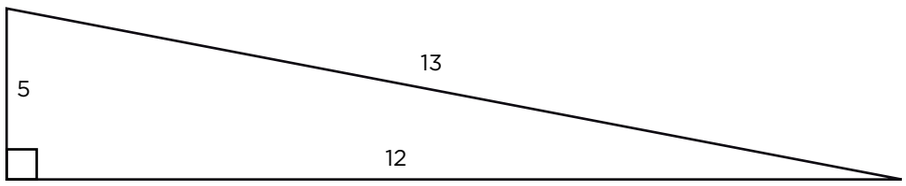

Figure 1

Quel est le triplet pythagoricien dont le plus petit nombre est 13 ?

3.

Voici une preuve du théorème de Pythagore qui est essentiellement géométrique.

On prend un rectangle de largeur *a* et de hauteur *b*. On effectue une rotation de 90 degrés autour de son sommet inférieur gauche afin d'obtenir un second rectangle comme dans la figure suivante.

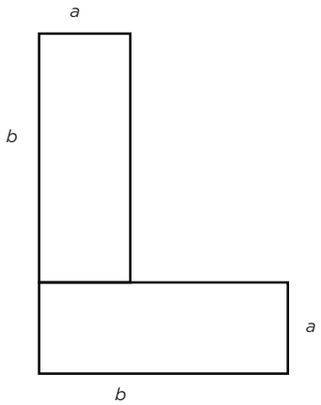

Figure 2

On divise chacun des rectangles en deux par leur diagonale. On obtient quatre triangles rectangles.

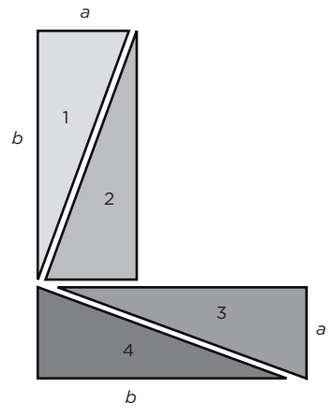

Figure 3

On fait pivoter de 90 degrés les triangles rectangles 2 et 3 de façon à obtenir l'image suivante.

On constate qu'on obtient un carré à l'intérieur d'un autre carré.

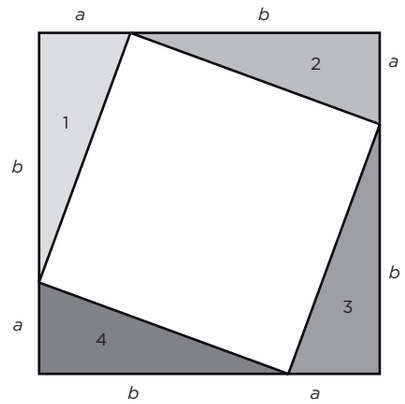

Figure 4

On indique les mesures des côtés avec des lettres appropriées.

On a quatre triangles rectangles dont :

- le plus petit côté est *a*,
- la base est *b*,
- et l'hypoténuse *c*.

Chaque hypoténuse *c* représente donc les côtés du petit carré de l'intérieur.

Le plus petit côté plus la base ($a + b$) de chaque triangle rectangle représente chacun des côtés du grand carré.

Nous connaissons donc les aires des deux carrés que nous avons.

Petit carré : c^2

Grand carré : $(a + b)^2$

De plus, l'aire de chacun des quatre triangles rectangles est $\frac{1}{2}ab$. La surface totale des quatre triangles rectangles est donc $2ab$.

À partir des résultats précédents, terminez la démonstration du théorème de Pythagore.

4.

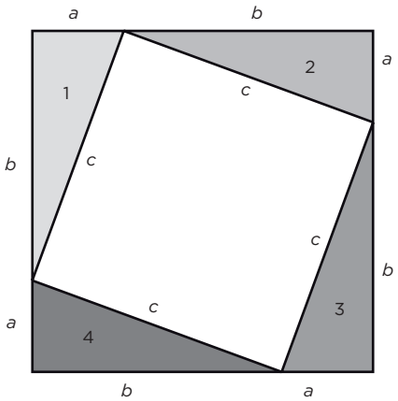

Figure 5

Une autre preuve est basée sur l'aire du trapèze.

Voici un dessin qui permet de faire cette preuve. Tous les triangles sont des triangles rectangles.

À partir du dessin, écrivez la démonstration.

5.

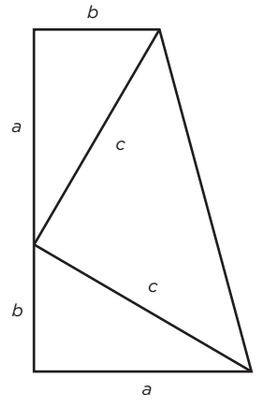

Figure 6

Quelles sont les aires des différentes parties du dessin ?

Pouvez-vous former une égalité avec ces aires ?

Voici un autre dessin qui permet de faire une preuve du théorème de Pythagore. Tous les triangles sont des triangles rectangles.

On retrouve dans ce dessin des figures semblables. Trouvez-les et formez une égalité qui permet de les mettre en relation.

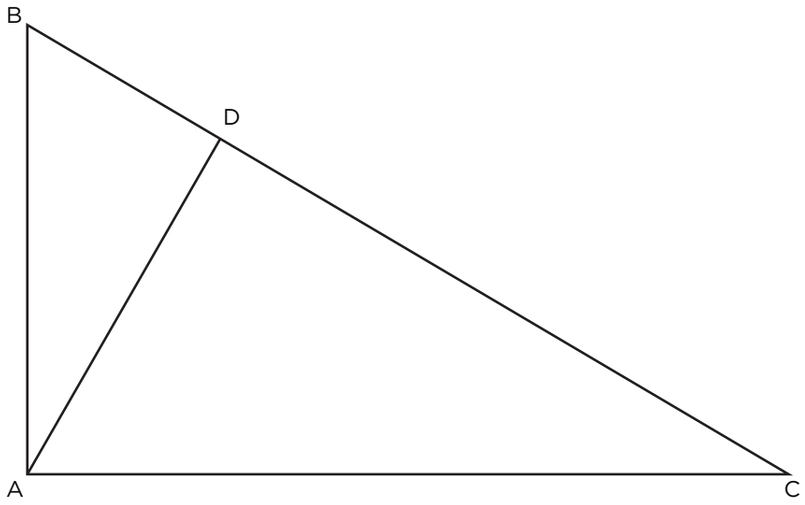

Figure 7

À partir du dessin, écrivez la démonstration.

6.

Curieux ?

Maintenant que vous avez pu apprécier trois démonstrations du théorème de Pythagore, en voici une quatrième.

Soit deux carrés, un premier de côté *a* et un deuxième de côté *b*. On place les deux carrés côte à côte de façon à ce qu'ils soient sur une même base et que la mesure de la base soit (*a* + *b*).

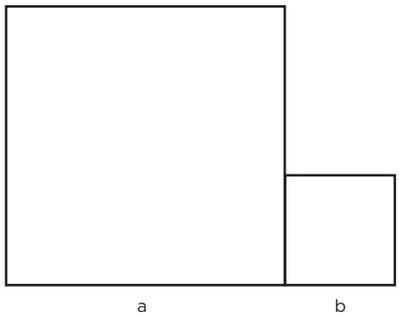

Figure 8

Sur la base du carré de côté *a*, on mesure une distance *b* à partir du sommet inférieur gauche. On crée un triangle rectangle de cathètes *a* et *b* et d'hypoténuse *c*. Le reste de la base mesure donc (*a* + *b*) – *b* = *a*. On crée sur ce segment un autre triangle rectangle de cathètes *a* et *b* et d'hypoténuse *c*.

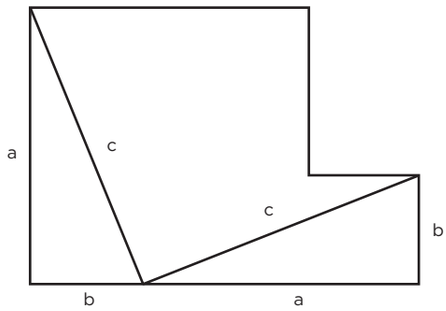

Figure 9

On prend le premier triangle et on lui fait subir une rotation de 90° autour de son sommet supérieur. Au deuxième triangle, on lui fait subir une rotation de –90° autour de son sommet supérieur.

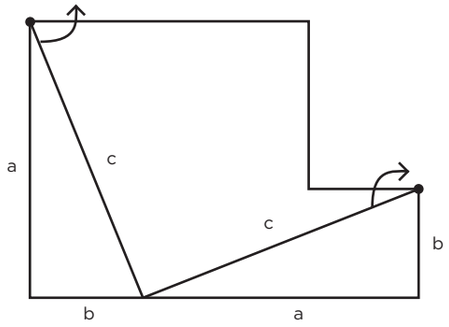

Figure 10

Voici la figure obtenue après les rotations :

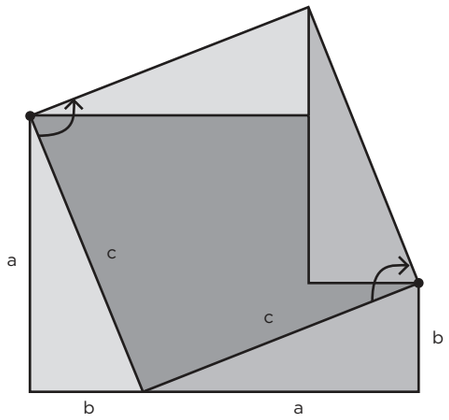

Figure 11

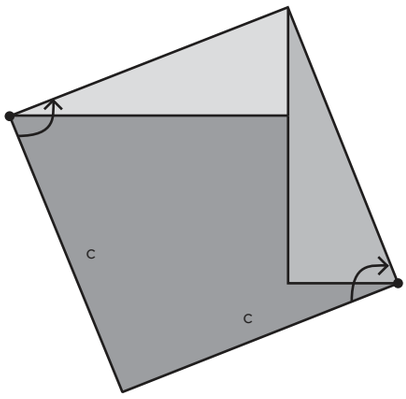

Figure 12

Complétez maintenant cette preuve.

7.

5.7 L'épreuve de Pythagore
Corrigé

Lors de Show Math, vous avez pu apprécier quelques-unes des premières décimales du nombre π. Parmi ces décimales, on retrouve à la 351e position le chiffre des unités du nombre 367 précédé de 6 puis de 3. Le nombre 367 représente la quantité de preuves différentes recensées pour démontrer le théorème de Pythagore !

Ce théorème, qui est connu depuis l'Antiquité, est nommé d'après Pythagore de Samos, mathématicien, philosophe et astronome de la Grèce Antique. Il énonce que dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes.

Ce théorème engendre des triplets pythagoriciens, par exemple 3 – 4 – 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

Trouvez-en d'autres.

1. (Page 1)

Par exemple, on a les triplets suivants :

6 – 8 – 10 (ou tous les multiples du triplet pythagoricien 3 – 4 – 5)
5 – 12 – 13 et ses multiples
8 – 15 – 17 et ses multiples

Outre la relation de Pythagore, trouvez au moins un autre lien entre les trois nombres d'un triplet pythagoricien.

2. (Page 1)

Si on a comme triplet 3 – 4 – 5 et 5 – 12 – 13, on peut trouver que la différence entre le deuxième et le troisième chiffre est de 1.

On peut aussi trouver que les multiples du triplet 3 – 4 – 5 ainsi que ceux de tous les autres triplets, dits primitifs, engendrent une infinité de triplets pythagoriciens.

Quel est le triplet pythagoricien dont le plus petit nombre est 13 ?

3. (Page 2)

$13^2 - 1 = 169 - 1 = 168$

On divise par 2.

$\frac{168}{2} = 84$

Alors, 84 est la mesure de l'autre côté qui forme l'angle droit du triangle rectangle.

On augmente 84 de 1 et on obtient la mesure de l'hypoténuse : 85.

On a bien : $13^2 + 84^2 = 85^2$.

De plus, l'aire de chacun des quatre triangles rectangles est ½ *ab*. La surface totale des quatre triangles rectangles est donc 2*ab*.

À partir des résultats précédents, terminez la démonstration du théorème de Pythagore.

4. (Page 4)

On y arrive en faisant la différence des aires

La surface du petit carré est égale à la surface du grand carré moins la surface des quatre triangles rectangles :

$c^2 = (a + b)^2 - 2ab$

d'où :

$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$

ce qui donne :

$c^2 = a^2 + b^2$

Conclusion, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit.

Voici un dessin qui permet de faire cette preuve. Tous les triangles sont des triangles rectangles.

À partir du dessin, écrivez la démonstration.

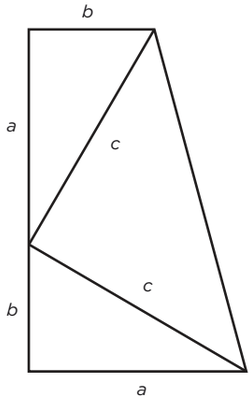

Figure 6

5. (Page 5)

Preuve :

L'aire du trapèze est égale à la somme de la mesure des deux bases multipliée par la mesure de la hauteur, puis divisée par 2. Elle est donc égale à (*a*+*b*)(*a*+*b*)/2. Elle est aussi égale à (*ab*)/2+(*ab*)/2+c/2. Nous avons donc l'égalité suivante :

$$\frac{(a + b)(a + b)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$(a + b)(a + b) = ab + ab + c^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = 2ab + c^2 - 2ab$

$a^2 + b^2 = c^2$

Ce qui démontre bien le théorème de Pythagore.

À partir du dessin, écrivez la démonstration.

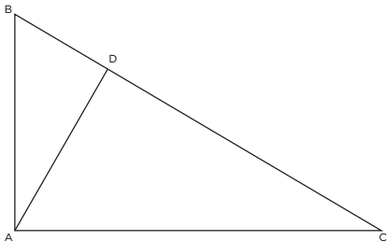

Figure 7

6. (Page 6)

Les triangles ADB, CDA et CAB sont semblables. On peut donc écrire les égalités suivantes :

$$\frac{m\overline{BD}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$$

$$m\overline{BD} \times m\overline{BC} = m\overline{AB}^2$$

et

$$\frac{m\overline{DC}}{m\overline{AC}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}}$$

$$m\overline{DC} \times m\overline{BC} = m\overline{AC}^2$$

Note : On pourrait aussi utiliser directement le théorème : « Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière ».

On fait la somme des deux égalités obtenues :

$$m\overline{BD} \times m\overline{BC} + m\overline{DC} \times m\overline{BC} = m\overline{AC}^2 + m\overline{AB}^2$$

Ce qui démontre bien le théorème de Pythagore.

Curieux ?

Soit deux carrés, un premier de côté *a* et un deuxième de côté *b*. On place les deux carrés côte à côte de façon à ce qu'ils soient sur une même base et que la mesure de la base soit (*a* + *b*).

Complétez maintenant cette preuve.

7. (Page 8)

Puisque le dernier carré (c x c) a été obtenu à partir des deux figures initiales par une suite d'isométries, son aire est égale à la somme des aires des carrés du début.

5.2 L’épreuve de Pythagore
Annexe

Une autre preuve du théorème de Pythagore.

Voici une autre preuve visuelle où les principales étapes sont illustrées. Pouvez-vous faire la preuve de chacun des énoncés présentés ?

Tout d’abord, à partir d’un triangle rectangle dont les côtés mesurent a et b et l’hypoténuse mesure c, on trace trois carrés qu’on juxtapose aux côtés du triangle. On veut montrer qu’on peut diviser le carré d’aire c^2 en deux rectangles d’aire a^2 et b^2.

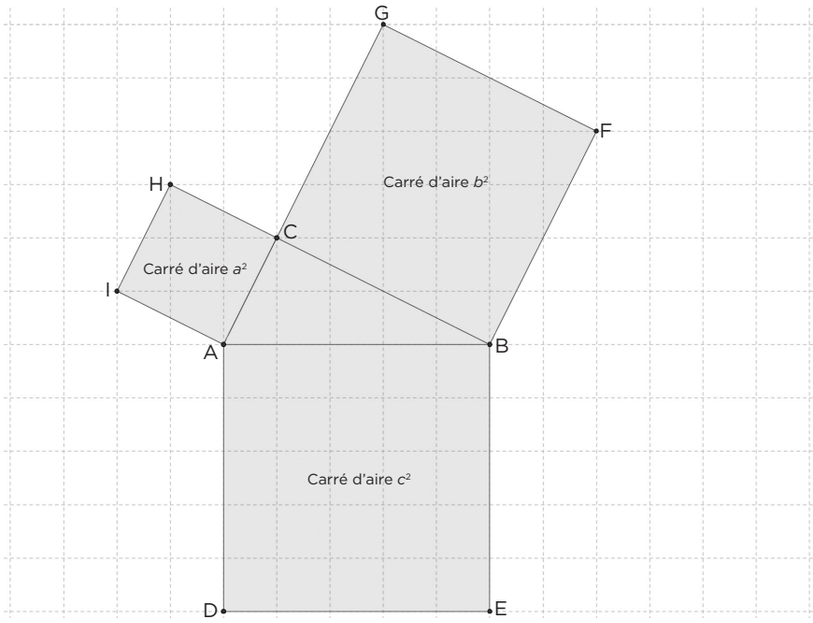

Figure 1

On trace la diagonale du carré d'aire a^2 en reliant les sommets I et C. *Quelle est l'aire des deux figures géométriques obtenues ?* Pour vous aider, les petits carrés formant le quadrillage ont une aire d'une unité carrée.

1.

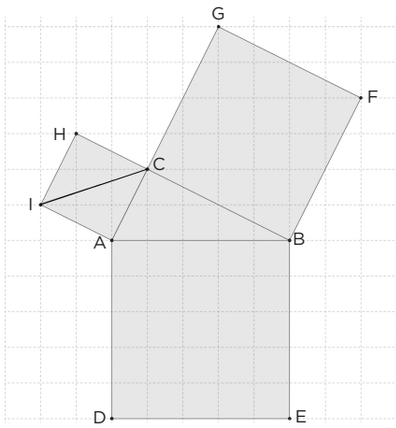

Figure 2

Quelles sont ces figures ?

2.

On trace un segment de droite qui relie le point I au point B. L'aire du triangle IBA est la même que celle du triangle IAC.

Prouvez-le.

3.

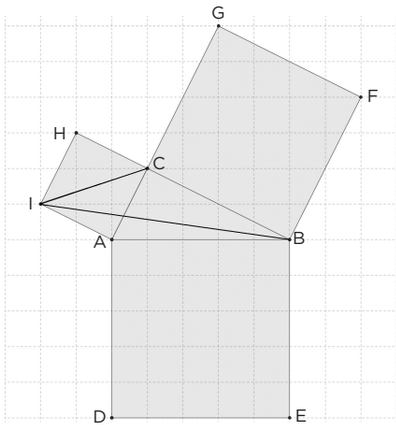

Figure 3

On fait pivoter le triangle IBA de 90° dans le sens horaire autour du point A. Le triangle IAB est isométrique au triangle CDA.

Prouvez-le.

4.

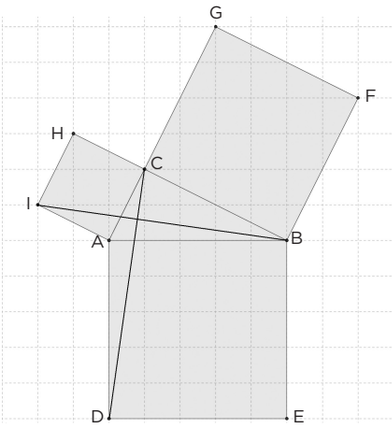

Figure 4

On trace un segment issu du point C et qui coupe perpendiculairement le segment DE. Nommez J le point de rencontre de ce segment avec le segment DE et K le point de rencontre avec le segment AB.

Expliquez pourquoi le segment rouge coupe également le segment AB perpendiculairement.

5.

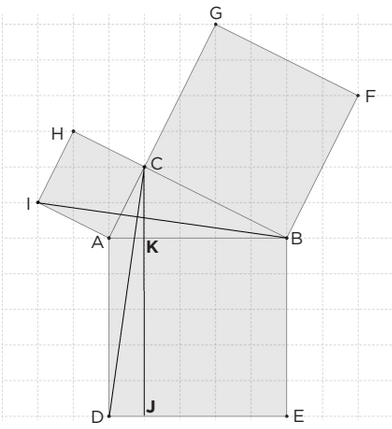

Figure 5

On trace un segment qui relie le point D au point K.

Trouvez l'aire du triangle DKA. Laissez les traces de votre démarche.

6.

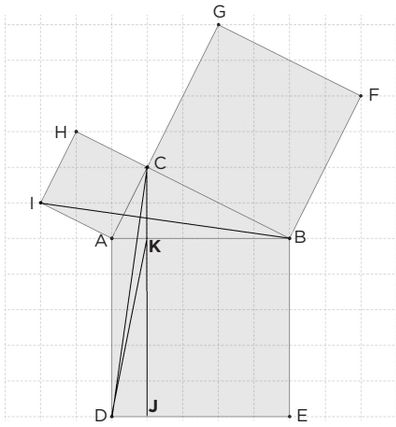

Figure 6

Nous avons obtenu le rectangle AKJD.

Quelle est son aire ? Laissez les traces de votre démarche.

7.

Nous voulons montrer qu'on peut diviser le carré d'aire c^2 en deux rectangles d'aire a^2 et b^2.

Complétez cette preuve.

8.

5.2 L'épreuve de Pythagore
Annexe Corrigé

On trace la diagonale du carré d'aire a^2 en reliant les sommets I et C. *Quelle est l'aire des deux figures géométriques obtenues ?* Pour vous aider, les petits carrés formant le quadrillage ont une aire d'une unité carrée.

1. (Page 2)

Leur aire est de 2,5 unités². Le carré a pour mesure de côté $\sqrt{5}$. Son aire est donc de 5 et, comme on a tracé sa diagonale, on se retrouve avec deux triangles de 2,5 unités².

Quelles sont ces figures ?

2. (Page 2)

Ce sont deux triangles rectangles isocèles.

On trace un segment de droite qui relie le point I au point B. L'aire du triangle IBA est la même que celle du triangle IAC.

Prouvez-le.

3. (Page 2)

Pour trouver l'aire d'un triangle, il faut multiplier la mesure de sa base par la mesure de sa hauteur et diviser le tout par 2. Les deux triangles ont la même base, soit le segment IA, et ils ont aussi la même hauteur. En effet, leur hauteur est équivalente au segment AC. Nous pouvons donc conclure que les deux triangles ont la même aire.

Autre façon : L'aire du triangle IAB est sa base horizontale, 5, fois sa hauteur, 1, divisée par 2, ce qui équivaut à 2,5 unités, comme l'autre.

On fait pivoter le triangle IBA de 90° dans le sens horaire autour du point A. Le triangle IAB est isométrique au triangle CDA.

Prouvez-le.

4. (Page 3)

Pour que deux triangles soient isométriques, il faut avoir un des trois cas suivants : ils ont 3 côtés isométriques, ils ont 1 angle isométrique compris entre 2 côtés isométriques ou ils ont 1 côté isométrique compris entre 2 angles isométriques.

- IA est isométrique à AC car ils forment deux côtés du carré IACH et que les côtés d'un carré sont isométriques.
- AB est isométrique à AD, car ils forment deux côtés du carré ABED et que les côtés d'un carré sont isométriques.
- IAB est isométrique à CAD car IAB= IAC+ CAB=90°+ CAB et CAD= CAB+BAD= CAB+90°

Les deux triangles, IAB et CDA sont donc isométriques par CAC.

Ou, plus simplement, l'un est l'image de l'autre par une isométrie.

Expliquez pourquoi le segment rouge coupe également le segment AB perpendiculairement.

5. (Page 3)

Le segment AB est parallèle au segment DE. Par construction, le segment rouge est perpendiculaire au segment DE. Ainsi, le segment rouge coupe le segment AB perpendiculairement. Lorsque deux droites sont parallèles, ce qui est perpendiculaire à une est perpendiculaire à l'autre.

Trouvez l'aire du triangle DKA. Laissez les traces de votre démarche.

6. (Page 4)

Nous savons que le triangle DKA a la même aire que le triangle CDA, car ils ont la même base (AD) et la même hauteur (AK).

De plus, l'aire du triangle CDA est égale à l'aire du triangle IBA qui est de même aire que le triangle ICA. Ainsi, le triangle DKA est de même aire que le triangle ICA. Or, comme l'aire du triangle ICA est de 2,5 unités^2, il en est de même pour le triangle DKA.

Nous avons obtenu le rectangle AKJD.

Quelle est son aire ? Laissez les traces de votre démarche.

7. (Page 4)

Le rectangle AKJD est formé de deux triangles, DKA et DKJ. Ce sont deux triangles isométriques, car ils sont formés par la diagonale du rectangle. L'aire de DKA est de 2,5 unités^2. Il en est donc de même pour l'aire du triangle DKJ. L'aire du rectangle AKJD est égale à la somme de l'aire des deux triangles qui le forment, soit 5 unités^2.

Nous voulons montrer qu'on peut diviser le carré d'aire c^2 en deux rectangles d'aire a^2 et b^2.

Complétez cette preuve.

8. (Page 4)

Le carré d'aire b^2 a pour mesure de côté $\sqrt{5}$. Son aire est donc de 20. Si on trace la diagonale du carré en reliant les sommets F et C, l'aire des deux triangles obtenus, FCB et FCG, est de 10 unités^2.

On trace un segment de droite qui relie le point F au point A. L'aire du triangle FAB est la même que celle du triangle FCB, car les deux triangles ont la même base, soit le segment BF et ils ont aussi la même hauteur CB.

Si on fait pivoter le triangle FAB de 90° dans le sens horaire autour de son sommet B, on obtient le triangle CEB. Le triangle FAB est isométrique au triangle CEB car l'un et l'image de l'autre par isométrie.

Si on trace un segment reliant le point E au point K, on obtient le triangle KEB. Son aire est de 10 unités^2,car :

- Le triangle KEB a la même aire que le triangle CEB, car ils ont la même base (BE) et la même hauteur (BK).
- L'aire du triangle CEB est égale à l'aire du triangle FAB qui est de même aire que le triangle FCB.
- Ainsi, le triangle KEB est de même aire que le triangle FCB. Or, comme l'aire du triangle FCB est de 10 unités^2, il en est de même pour le triangle KEB.

Le rectangle KBEJ est formé de deux triangles, KEB et KEJ. Ce sont deux triangles isométriques, car ils sont formés par la diagonale du rectangle KBEJ. L'aire de KEB est de 10 unités^2. Il en est donc de même pour l'aire du triangle KEJ.

L'aire du rectangle KBEJ est égale à la somme de l'aire des deux triangles le formant, soit 20 unités^2.

Le carré ABED est formé des rectangles KBEJ et AKJD. Son aire a donc pour mesure la somme de l'aire des deux rectangles. Elle vaut :

20 unités^2 + 5 unités^2 = 25 unités^2

L'aire du carré ABED est donc de 25 unités^2 et on peut conclure que la somme de l'aire des deux carrés a et b est égale à l'aire de c.