# TRIGONOMETRIE

## Partie A : Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

**Exercice 1**

Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés : 60° ; 150° ; 10° ; 12° ; 198° ; 15°

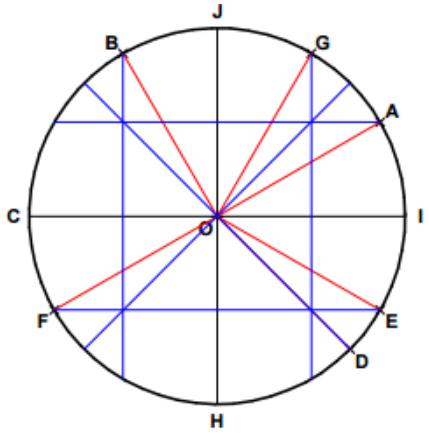
**Exercice 2**

Dans chacun des cas suivant, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :

1) $-\pi$ 2) $\frac{3\pi}{2}$ 3) $10\pi$ 4) $-\frac{\pi}{4}$

**Exercice 3**

Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminer les réels associés aux points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J.




**Exercice 4**

Placer sur le cercle trigonométrique les points K, L, M, N, P et Q repérés par $\frac{2\pi}{3}$ ; $\frac{3\pi}{4}$ ; $-\frac{\pi}{6}$ ; $\frac{7\pi}{6}$ ; $-\frac{5\pi}{4}$ et $-\frac{2\pi}{3}$

**Exercice 5**

1) Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer la valeur de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$ .

2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

## Partie B : Angle orienté, mesure principale d'un angle

**Exercice 1**

Déterminer la mesure principale des angles dont les mesures en radians sont :

$$-\frac{7\pi}{3} \; ; \; -\pi \; ; \; \frac{13\pi}{6} \; ; \; \frac{47\pi}{12} \; ; \; -\frac{49\pi}{6} \; ; \; \frac{11\pi}{3} \; ; \; -\frac{241\pi}{4} \; ; \; -\frac{37\pi}{12}$$

**Exercice 2**

Donner une mesure en radian des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}) =$

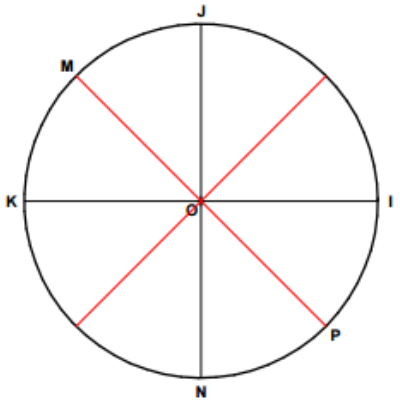
$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}) =$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP}) =$

$(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OP}) =$

$(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}) =$

$(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OM}) =$




**Exercice 3**

1) Construire un triangle direct $ABC$ rectangle en $A$ tel que $C = 2\,AC$ .

2) Construire deux triangles équilatéraux direct $ACD$ et $BE$ .

3) Donner une mesure en radian des angles $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ ; $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ ; $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{CB})$ .

**Exercice 4**

Sachant que $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{7}\ [2\pi]$ et $(\vec{u};\vec{w}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ , déterminer la mesure principale de $(\vec{v};\vec{w})$ ; $(-\vec{u};\vec{v})$ et $(-\vec{w};\vec{v})$.

## Partie C : Angles associés

**Exercice 1**

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi)$
2) $B = \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
3) $C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$

**Exercice 2**

Exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$ les réels suivants :

1) $A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$
2) $B = \sin(x + 100\pi)$
3) $C = \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right)$
4) $D = \sin\left(\frac{2013\pi}{2} + x\right)$
5) $E = \sin(x - 78\pi)$
6) $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi + x)$
7) $G = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(-x - \pi) + 5\sin(-x)$

**Exercice 3**

Calculer les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$ ; $\sin\left(-\frac{18\pi}{4}\right)$ ; $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$

## Partie D : Equations et inéquations trigonométriques

**Exercice 1**

A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner toutes les valeurs possibles de $x$ vérifiant les conditions données.

1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $x \in [-\pi\,;\pi]$
2) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $x \in [-\pi\,;\pi]$
3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ avec $x \in [-\pi\,;3\pi]$
4) $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = -1$ avec $x \in [-2\pi\,;3\pi]$

**Exercice 2**

Résoudre les équations ci-dessous dans $\mathbb{R}$

1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ 2) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ 3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Exercice 3**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$
2) $4\sin^2(x) - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\sin(x) + \sqrt{3} = 0$

# CORRECTION - TRIGONOMETRIE

## Partie A : Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

### Exercice 1

**Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés : 60° ; 150° ; 10° ; 12° ; 198° ; 15°**

| Angle en ° | 60 | 150 | 10 | 12 | 198 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Angle en radians | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{18}$ | $\frac{\pi}{15}$ | $\frac{11\pi}{10}$ | $\frac{\pi}{12}$ |

### Exercice 2

**Dans chacun des cas suivant, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :**

**1)** $-\pi$ **2)** $\frac{3\pi}{2}$ **3)** $10\pi$ **4)** $-\frac{\pi}{4}$

1) $-\pi : \pi; 3\pi; 5\pi$ et plus généralement $\pi + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2) $\frac{3\pi}{2} : -\frac{\pi}{2} ; \frac{7\pi}{2} ; \frac{11\pi}{2}$ et plus généralement $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , soit $\frac{-\pi+4\pi k}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

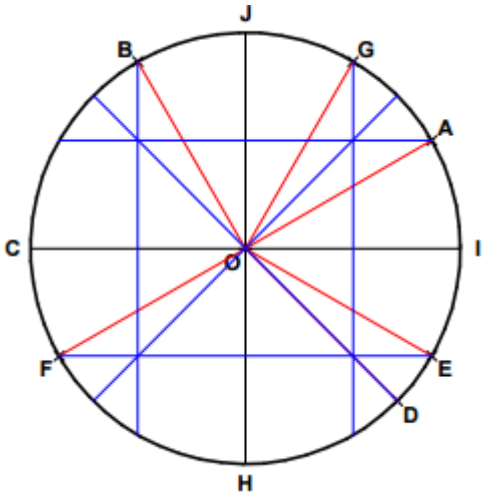
3) $10\pi : 0; 2\pi; 4\pi$ et plus généralement $2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

4) $-\frac{\pi}{4} : \frac{7\pi}{4} ; \frac{15\pi}{4} ; \frac{23\pi}{4}$ et plus généralement $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ soit $\frac{(-\pi+8\pi k)}{4}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

### Exercice 3

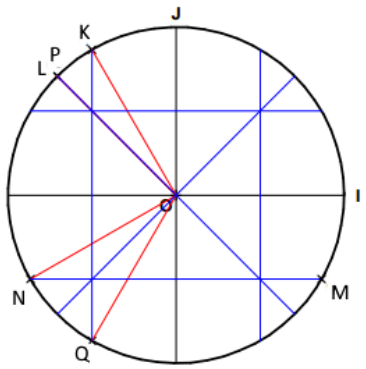
**Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminer les réels associés aux points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J.**

$A: \frac{\pi}{6}$ ; $B: \frac{2\pi}{3}$ ; $C: \pi$ ; $D: -\frac{\pi}{4}$ ; $E: -\frac{\pi}{6}$
$F: -\frac{5\pi}{6}$ ; $G: \frac{\pi}{3}$ ; $H: -\frac{\pi}{2}$ ; $I: 0$ ; $J: \frac{\pi}{2}$




### Exercice 4

**Placer sur le cercle trigonométrique les points K, L, M, N, P et Q repérés par** $\frac{2\pi}{3}$ ; $\frac{3\pi}{4}$ ; $-\frac{\pi}{6}$ ; $\frac{7\pi}{6}$ ; $-\frac{5\pi}{4}$ **et** $-\frac{2\pi}{3}$



**Exercice 5**

**1) Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer la valeur de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.**

**2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.**

1) $\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

De plus $\frac{9\pi}{5} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ donc $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) < 0$ et donc $\boxed{\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

2) $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{5\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}}$

$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ donc $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$

## Partie B : Angle orienté, mesure principale d'un angle

**Exercice 1**

**Déterminer la mesure principale des angles dont les mesures en radians sont :**

$$-\frac{7\pi}{3} \; ; \; -\pi \; ; \; \frac{13\pi}{6} \; ; \; \frac{47\pi}{12} \; ; \; -\frac{49\pi}{6} \; ; \; \frac{11\pi}{3} \; ; \; -\frac{241\pi}{4} \; ; \; -\frac{37\pi}{12}$$

Pour $-\frac{7\pi}{3}$ : $-3 < -\frac{7\pi}{3} < -2 \Leftrightarrow -3\pi < -\frac{7\pi}{3} < -2\pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{7\pi}{3} + 2\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{3} < 0$

La mesure principale de $-\frac{7\pi}{3}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$

Pour $-\pi$ : la mesure principale de $-\pi$ est $\boxed{\pi}$

Pour $\frac{13\pi}{6}$ : $2 < \frac{13}{6} < 3 \Leftrightarrow 2\pi < \frac{13\pi}{6} < 3\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{13\pi}{6} - 2\pi < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} < \pi$

Donc la mesure principale de $\frac{13\pi}{6}$ est $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

Pour $\frac{47\pi}{12}$ : $3 < \frac{47}{12} < 4 \Leftrightarrow 3\pi < \frac{47\pi}{12} < 4\pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{47\pi}{12} - 4\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{12} < 0$

Donc la mesure principale de $\frac{47\pi}{12}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{12}}$

Pour $-\frac{49\pi}{6}$ : $-9 < -\frac{49}{6} < -8 \Leftrightarrow -9\pi < -\frac{49\pi}{6} < -8\pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{49\pi}{6} + 8\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{6} < 0$

Donc la mesure principale de $-\frac{49\pi}{6}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{6}}$

Pour $\frac{11\pi}{3}$ : $3 < \frac{11}{3} < 4 \Leftrightarrow 3\pi < \frac{11\pi}{3} < 4\pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{11\pi}{3} - 4\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{3} < 0$

Donc la mesure principale de $\frac{11\pi}{3}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$

Pour $-\frac{241\pi}{4}$ : $-61\pi < -\frac{241\pi}{4} < -60\pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{241\pi}{4} + 60\pi < 0 \Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{4} < 0$

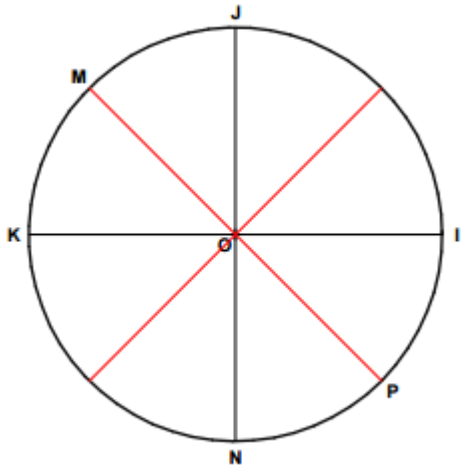
Donc la mesure principale de $-\frac{241\pi}{4}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{4}}$

Pour $-\frac{37\pi}{12}$ : $-4 < -\frac{37}{12} < -3 \Leftrightarrow -4\pi < -\frac{37\pi}{12} < -3\pi \Leftrightarrow 0 < -\frac{37\pi}{12} + 4\pi < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{11\pi}{12} < \pi$

Donc la mesure principale de $-\frac{37\pi}{12}$ est $\boxed{\frac{11\pi}{12}}$

## Exercice 2

**Donner une mesure en radian des angles orientés suivants :**




$(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}) =$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}) =$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP}) =$

$(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OP}) =$

$(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}) =$

$(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OM}) =$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \boxed{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}) = \boxed{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP}) = \boxed{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OP}) = \boxed{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}) = \boxed{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OM}) = \boxed{\pi + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

## Exercice 3

**1) Construire un triangle direct $ABC$ rectangle en $A$ tel que $C = 2\,AC$ .**

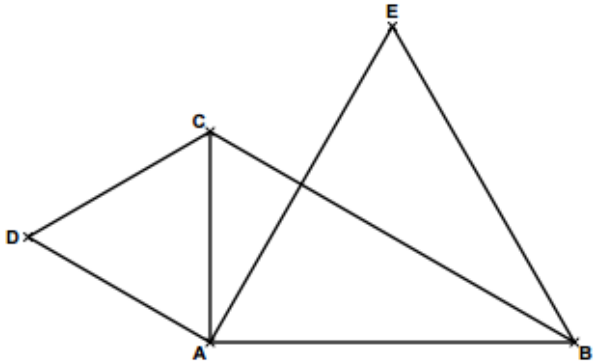
**2) Construire deux triangles équilatéraux direct $ACD$ et $BE$ .**

**3) Donner une mesure en radian des angles $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ ; $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ ; $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{CB})$ .**

3) Dans le triangle $ABC$.

$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ donc $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$.

Donc, vue l'orientation,




$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \boxed{\frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}) \quad [2\pi]$

$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

$\boxed{= -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$

$= -\frac{\pi}{3} + \pi + (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

$= \boxed{\pi + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

$(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$

$= \frac{\pi}{2} + \pi \quad [2\pi]$

$= \boxed{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$

**Exercice 4**

**Sachant que $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{7}\ [2\pi]$ et $(\vec{u};\vec{w}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ , déterminer la mesure principale de $(\vec{v};\vec{w})$ ; $(-\vec{u};\vec{v})$ et $(-\vec{w};\vec{v})$.**

$$\begin{aligned}(\vec{v};\vec{w}) &= (\vec{v};\vec{u}) + (\vec{u};\vec{w})\ [2\pi]\\ &= -(\vec{u};\vec{v}) + (\vec{u};\vec{w})\ [2\pi]\\ &= \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]\\ &= \boxed{-\frac{3\pi}{28}\ [2\pi]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-\vec{u};\vec{v}) &= \pi + (\vec{u};\vec{v})\ [2\pi]\\ &= \pi - \frac{\pi}{7}\ [2\pi]\\ &= \boxed{\frac{6\pi}{7}\ [2\pi]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-\vec{w};\vec{v}) &= \pi + (\vec{w};\vec{v})\ [2\pi]\\ &= \pi - (\vec{v};\vec{w})\ [2\pi]\\ &= \pi + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]\\ &= \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]\\ &= \boxed{-\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]}\end{aligned}$$

# Partie C : Angles associés

**Exercice 1**

**Simplifier les expressions suivantes :**

1) $A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi)$
2) $B = \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
3) $C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$

1) $A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi) \ = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \boxed{0}$

2) $B = \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \ = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-1}$

3) $C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi) \ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \boxed{2 + \sqrt{3}}$

## Exercice 2

**Exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$ les réels suivants :**

1) $A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$
2) $B = \sin(x + 100\pi)$
3) $C = \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right)$
4) $D = \sin\left(\frac{2013\pi}{2} + x\right)$
5) $E = \sin(x - 78\pi)$
6) $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi + x)$
7) $G = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(-x - \pi) + 5\sin(-x)$

1) $A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \boxed{-\sin(x)}$

2) $B = \sin(x + 100\pi) = \sin(x + 2\pi \times 50) = \boxed{\sin(x)}$

3) $C = \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right) = \cos(1006\pi + x) = \cos(2\pi \times 503 + x) = \boxed{\cos(x)}$

4) $D = \sin\left(\frac{2013\pi}{2} + x\right) = \sin\left(1006\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\pi \times 503 + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right)$
$= \cos(-x) = \boxed{\cos(x)}$

5) $E = \sin(x - 78\pi) = \sin(x - 2\pi \times 39) = \boxed{\sin(x)}$

6) $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi + x) = \sin(x) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5 \times (-\sin(x))$
$= \sin(x) - 4\cos(x) + 5\sin(x) = \boxed{6\sin(x) - 4\cos(x)}$

7) $G = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(-x - \pi) + 5\sin(-x) = \cos(x) + 2\cos(x) - 5\sin(x) = \boxed{3\cos(x) - 5\sin(x)}$

## Exercice 3

**Calculer les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$ ; $\sin\left(-\frac{18\pi}{4}\right)$ ; $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$**

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\sin\left(-\frac{18\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{-1}$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{32\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-8\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

## Partie D : Equations et inéquations trigonométriques

**Exercice 1**

**A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner toutes les valeurs possibles de $x$ vérifiant les conditions données.**

1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $x \in [-\pi\,;\pi]$
2) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $x \in [-\pi\,;\pi]$
3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ avec $x \in [-\pi\,;3\pi]$
4) $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = -1$ avec $x \in [-2\pi\,;3\pi]$

1) $x = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$
2) $x = \boxed{\frac{\pi}{4}}$
3) $x \in \boxed{\left\{-\frac{5\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}\right\}}$
4) $x \in \boxed{\left\{-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right\}}$

**Exercice 2**

**Résoudre les équations ci-dessous dans $\mathbb{R}$**

1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ 2) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ 3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1) $\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ou $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi k\ ;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

2) $\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k\ ;\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ou $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{5\pi}{5} + 2\pi k\ ;\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

4) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow s = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ou $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k\ ;\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

## Exercice 3

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes**

**1)** $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$ **2)** $4\sin^2(x) - 2(1+\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0$

1) On pose $X = \cos(x)$ et alors $2X^2 + 9X + 4 = 0$.

$\Delta = 9^2 - 4 \times 2 \times 4 = 49$ donc cette équation a deux solutions $X_1 = \frac{-9+7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-9-7}{4} = -4$.

On a donc $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ ou $\cos(x) = -4$ .

La dernière équation n'a pas de solution car un cosinus est toujours supérieur à $-1$.

D'autre part, $\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ou $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$$\boxed{S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\,;\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

2) On pose $X = \sin(x)$ et alors $4X^2 - 2(1+\sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0$.

$$\Delta = \left(-2(1+\sqrt{3})\right)^2 - 4 \times 4 \times \sqrt{3} = 4(1+\sqrt{3})^2 - 16\sqrt{3} = 4(1 + 2\sqrt{3} + 3) - 16\sqrt{3}$$
$$= 4 - 8\sqrt{3} + 12 = (2 - 2\sqrt{3})^2$$

donc l'équation a deux solutions $X_1 = \frac{2(1+\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})}{8} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{2(1+\sqrt{3})-(2-2\sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a donc $\sin(x) = \frac{1}{2}$ ou $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ou $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

Finalement $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k\,;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\,;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\,;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$

**Exercices tirés de :** http://isa.gache.free.fr/1S/1S_1213_exosup_trigo.pdf