

Cours de turbomachine à fluide compressible

Xavier OTTAVY

CNRS UMR 5509

*Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique
à l'École Centrale de Lyon*

Plan du cours

- ❖ **Introduction**
- ❖ **Analyse thermodynamique monodimensionnelle**
- ❖ **Analyse de l'écoulement dans le plan circonférentiel**
- ❖ **Équation de l'équilibre radial simplifié**
- ❖ **Cas d'application : dessin d'un étage de compresseur axial**

1^{ère} partie - Introduction

❖ Introduction

- Définition
- Fonctions et domaines d'utilisation des turbomachines
- Notion d'étage – échanges d'énergies
- Courbes caractéristiques
- Approches 1D, 2D, 2.5D et 3D

❖ Analyse thermodynamique monodimensionnelle

❖ Analyse de l'écoulement dans le plan circonférentiel

❖ Équation de l'équilibre radial simplifié

❖ Cas d'application : dessin d'un étage de compresseur axial

Définition

- ❖ Une turbomachine est une machine tournante qui réalise un transfert d'énergie entre son arbre propre, et un fluide en mouvement. Ce transfert peut s'effectuer dans les deux sens :
 - une récupération de l'énergie du fluide sur l'arbre de la machine (fonction réalisée par les machines de type **turbine**)
 - une augmentation de l'énergie du fluide par fourniture d'énergie mécanique sur l'arbre de la machine (fonction réalisée par les machines de type **compresseur, ventilateur, pompe ...**)

Fonctions et domaines d'utilisation des turbomachines

❖ Récupération de l'énergie d'un fluide (*turbines*)

- liquide : récupération d'énergie potentielle hydraulique (barrages,...)
- gaz : turbines de dentiste, turbocompresseurs, turbopompes, ...
- turbines associées à d'autres éléments (compresseurs, chambres de combustion,...) pour la production d'énergie mécanique, ou pour la propulsion en aéronautique.

❖ Compression de gaz (*compresseurs*)

- fonction qui se présente dans des domaines très diversifiés : industrie chimique (pression de réaction), industrie pétrolière (extraction du pétrole), ou simplement création d'air comprimé.
- compresseurs associés à d'autres éléments (turbines, chambres de combustion,...) pour la production d'énergie mécanique, ou pour la propulsion en aéronautique.

❖ Transport de fluide

- élévation : fournir une énergie pour vaincre le champ gravitationnel (pompes)
- transport horizontal : apport périodique d'énergie au fluide pour vaincre les pertes de charges (boosters)

❖ Ventilation

❖ Production d'énergie mécanique à partir d'une source de chaleur

Production réalisée par des turbines à gaz ou des turbines à vapeur. Ces machines associent dans un cycle thermodynamique turbines, compresseurs, sources de chaleur, refroidisseurs,... Puissance variant de quelques kW à plusieurs dizaines de MW.

- Production d'énergie électrique (aérospatiale, avions, chars, réseau nationale,...)
- Production d'énergie mécanique : entraînement d'hélice de bateau, d'avion (turbopropulseur), de rotor d'hélicoptère ...
- Turbines à vapeur essentiellement destinées à la production de forte puissance d'énergie électrique dans les centrales thermiques.

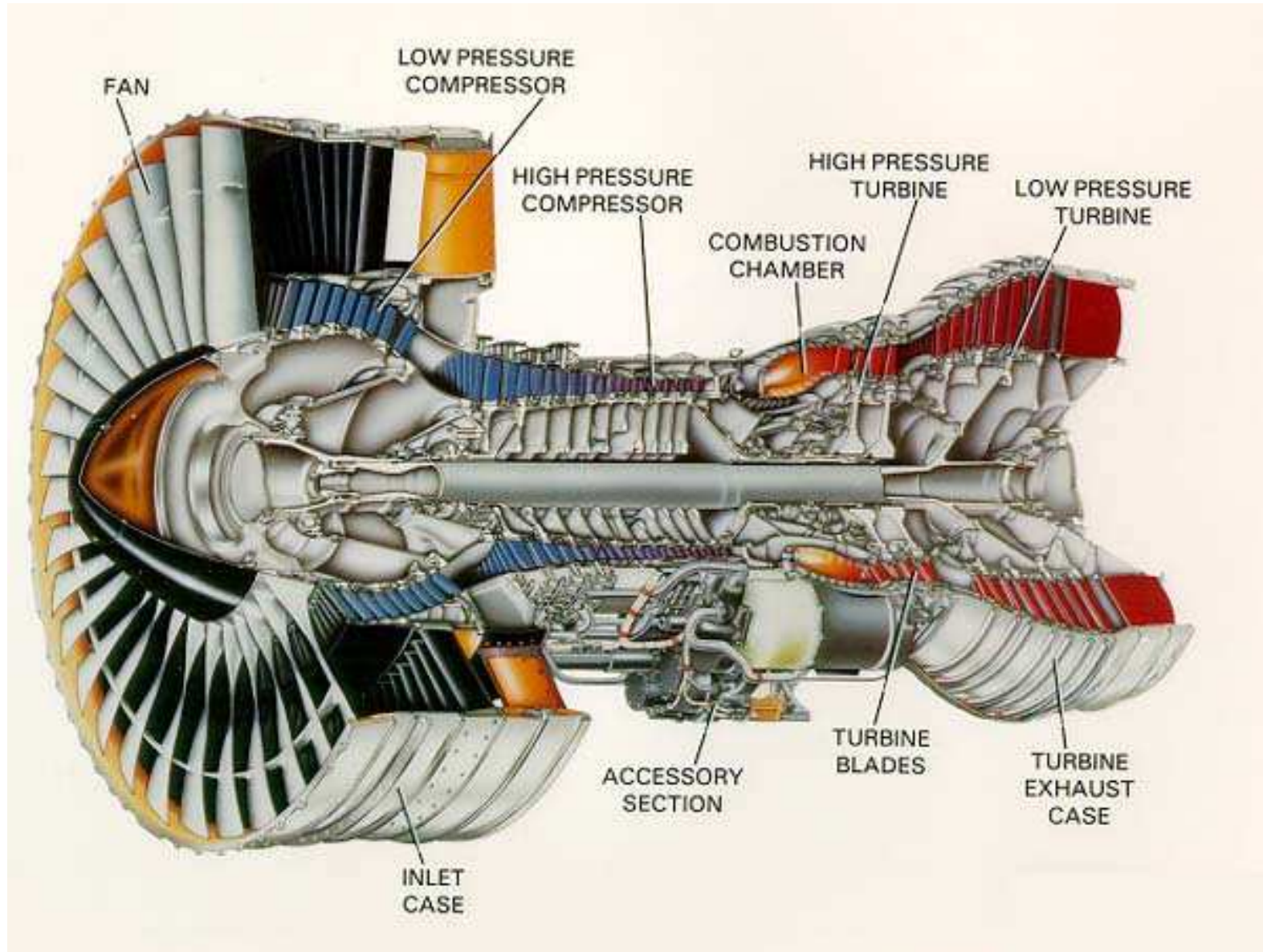
❖ Propulsion par réaction

Ces machines associent dans un cycle thermodynamique turbines, compresseurs, chambres de combustions, tuyères...

- Turboréacteurs
- Turbofans (multiflux)

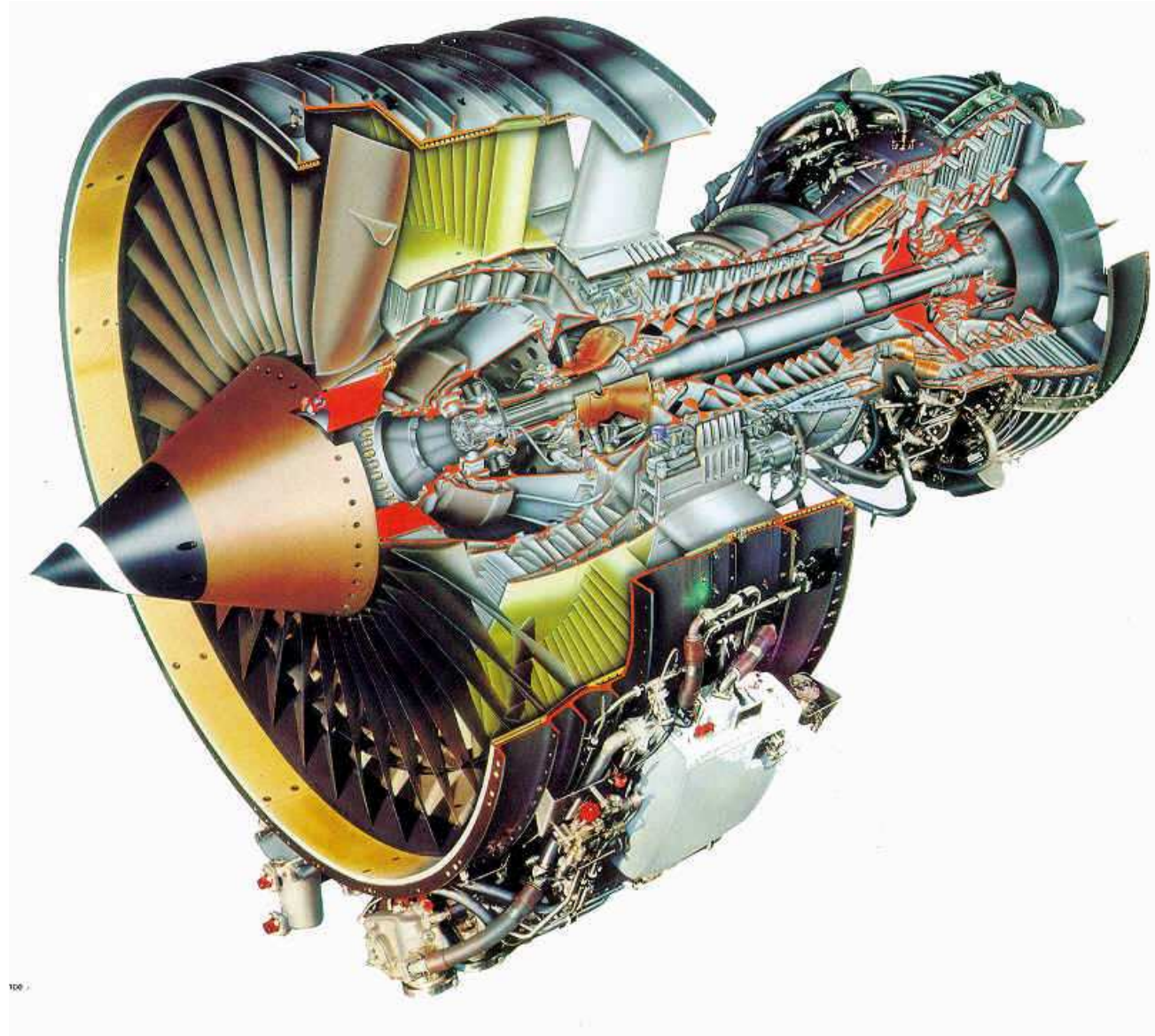
Introduction

- PW4156 - Pratt & Whitney (epower-propulsion.com)

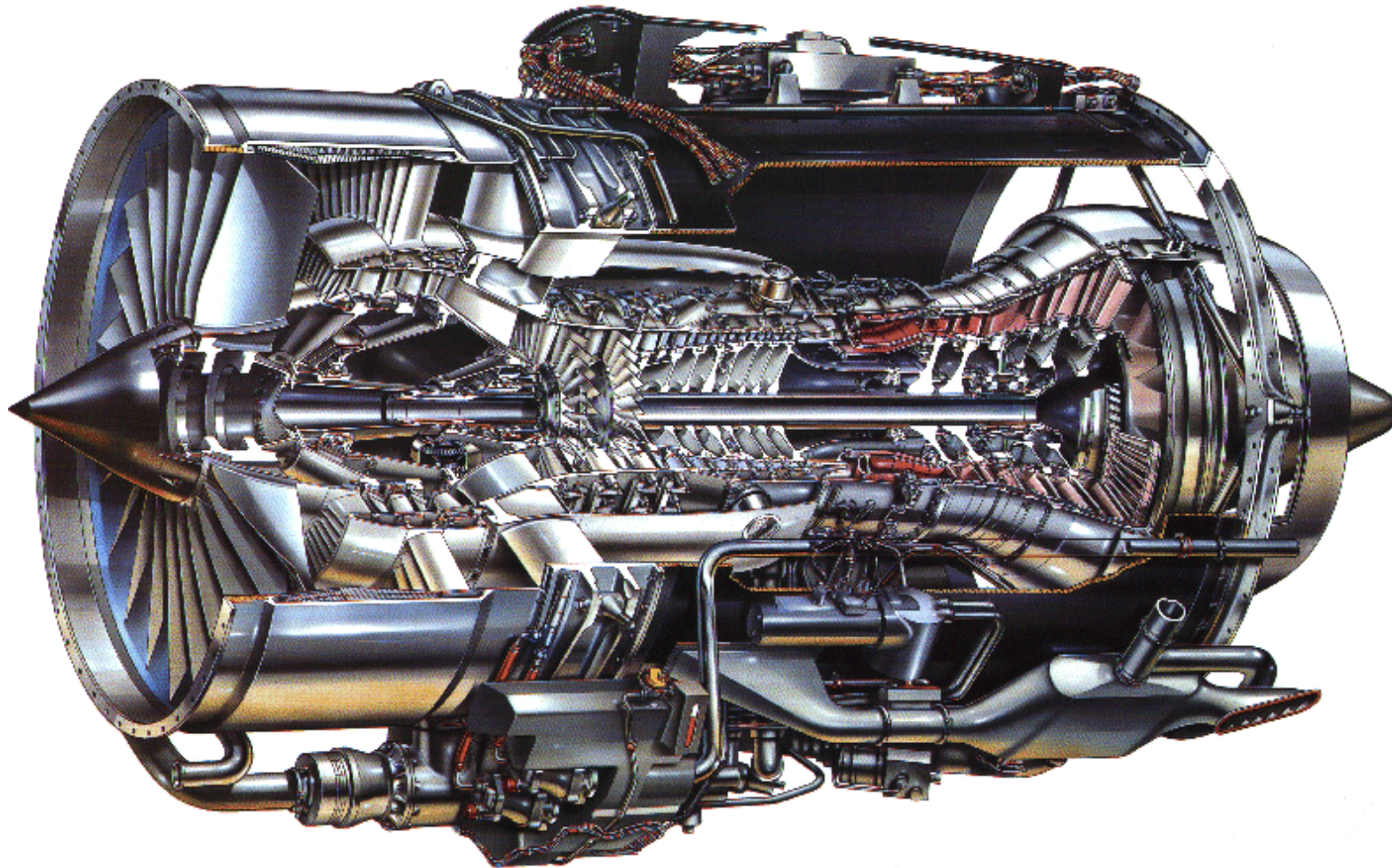


Introduction

- CFM56 – Snecma Moteurs (epower-propulsion.com)



- BR715 – BMW/Rolls-Royce (epower-propulsion.com)



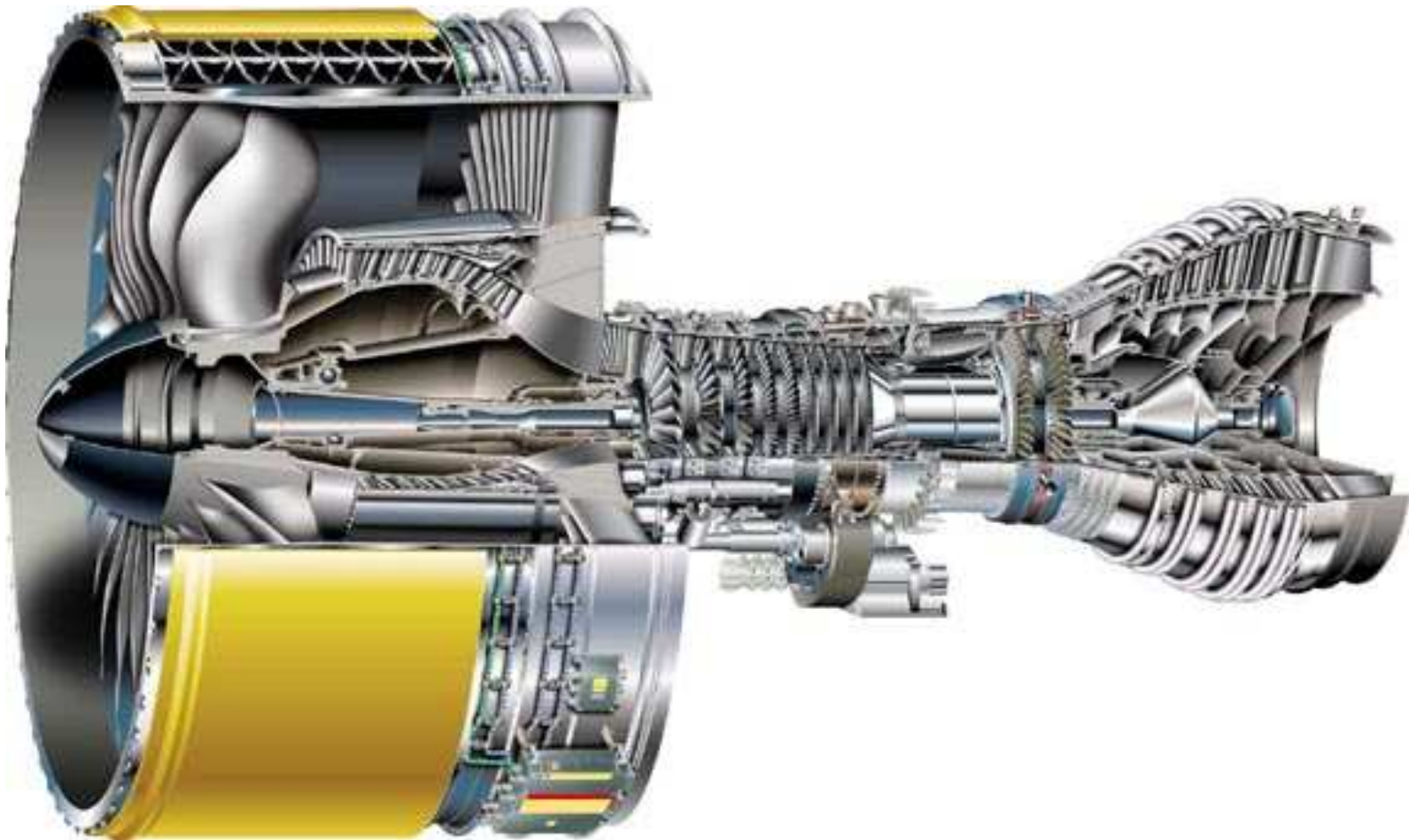
BMW Rolls-Royce
AeroEngines



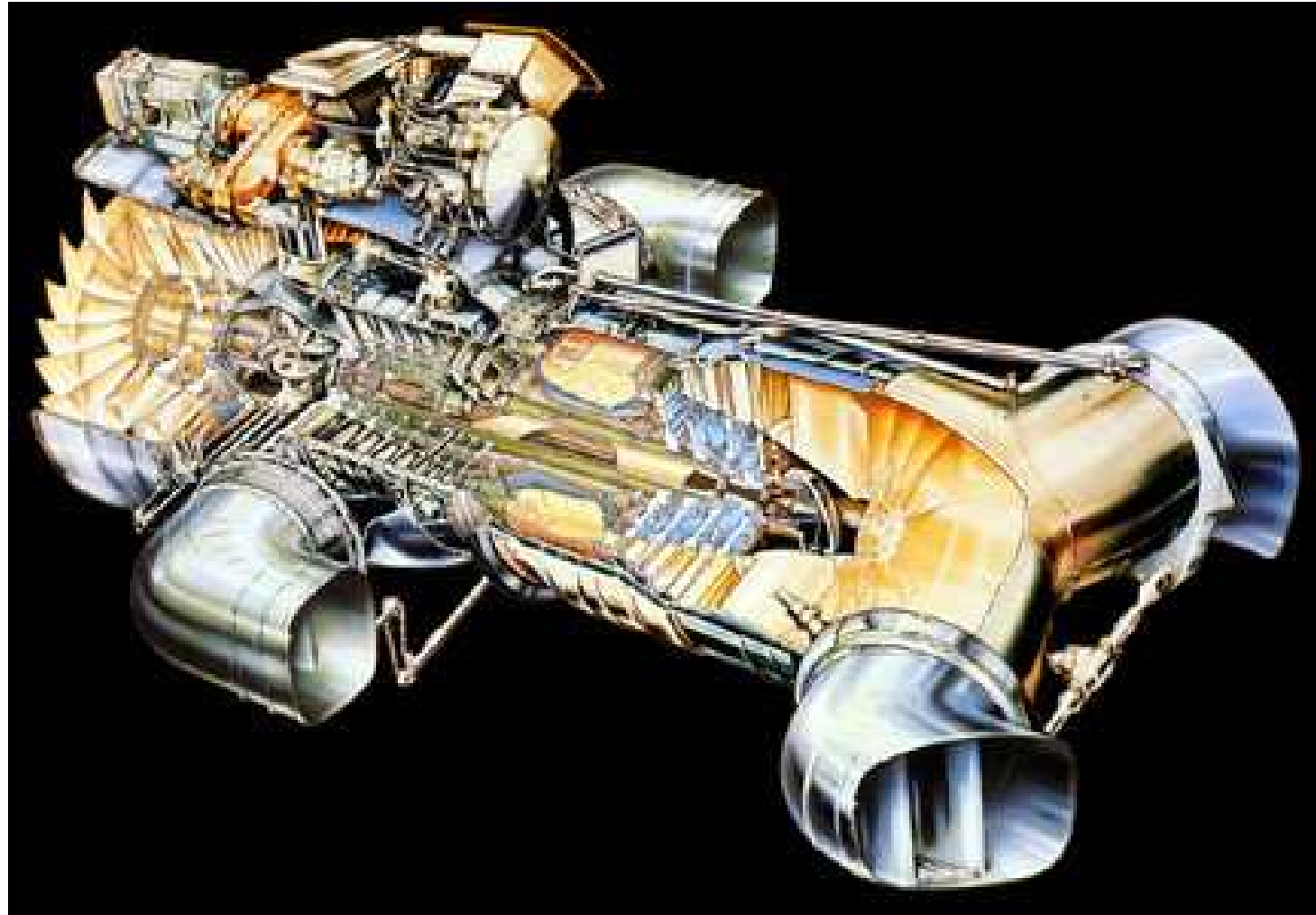
BR715

Introduction

- GP7000 – EA (GE / Pratt & Whitney) (epower-propulsion.com)

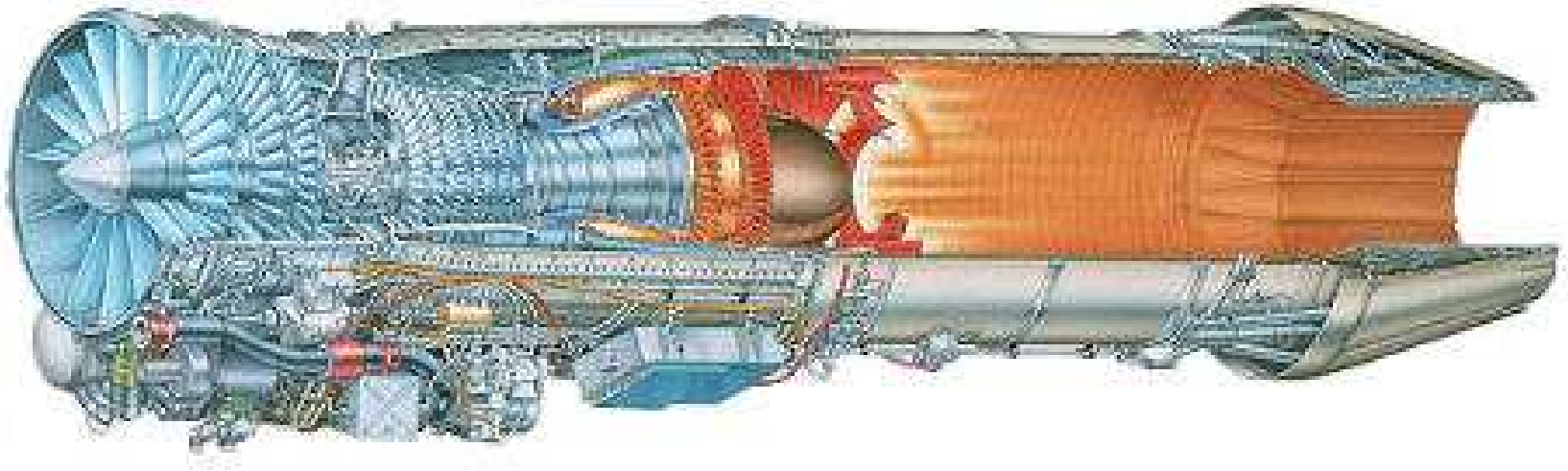


- PEGASUS – Rolls-Royce (epower-propulsion.com)



Introduction

- F404 – General Electric (epower-propulsion.com)



Notion d'étage – Échanges d'énergies

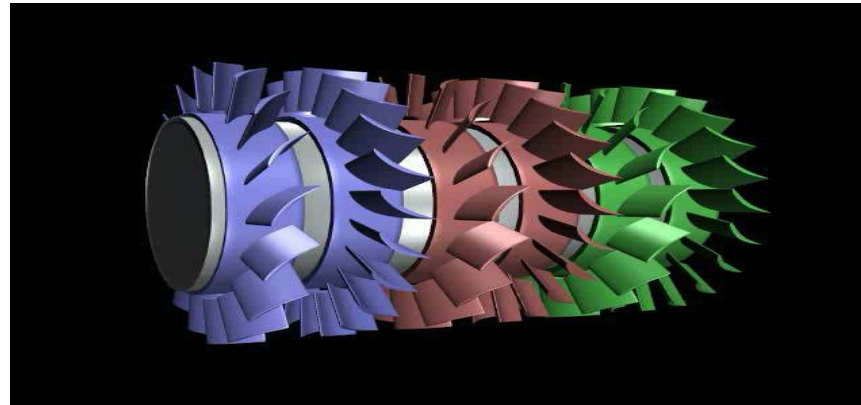
❖ Géométries des turbomachines

Les géométries sont très diverses (de l'éolienne à la Pelton), mais une majorité des turbomachines peut être répertoriée en 3 catégories :

- Les machines axiales : le fluide entre et sort avec une vitesse débitante approximativement axiale. Machines caractérisées par des **débits importants**, mais des **taux de pression limités** (de l'ordre de **1,4** pour un compresseur transsonique et de **2** pour un compresseur supersonique).
- Les machines centrifuges : le fluide sort approximativement dans un plan radial, l'entrée pouvant ne pas être radiale. Machines caractérisées par des **débits limités** et des **taux de pression important** (pouvant atteindre **10** grâce au travail de la force de Coriolis et à l'augmentation de la pression statique liée à l'action de la force centrifuge).
- Les machines mixtes

❖ Notion d'étage - échanges d'énergie

Un étage de turbomachine se compose d'une partie mobile appelée **rotor** (ou rouet) et d'une partie fixe appelée **stator** (ou selon le cas : redresseur, distributeur, diffuseur,...)



- **Le rotor :**

- **Rôle : assurer le transfert d'énergie** entre l'arbre de la machine et le fluide en mouvement.
- L'écoulement étant défléchi au passage de la roue, il existe donc une force exercée par le fluide sur les aubages.
- Le point d'application de la force se déplace du fait de la rotation des aubages, il y a donc travail => **échange d'énergie**

- Le rotor (suite):

- **Énergie de pression** : une turbomachine échange nécessairement de l'énergie de pression avec le fluide (même si cela ne doit pas être sa fonction principale).
 - Cas compresseur : **augmentation** de la pression pour compenser les pertes de charge du circuit.
 - Cas turbine : une partie de l'énergie récupérée l'est toujours sous forme de pression.
- **Énergie cinétique** : une turbomachine échange nécessairement de l'énergie cinétique avec le fluide du fait de la **giration** de l'écoulement au passage de la roue mobile.
- **Énergie calorifique** : il n'y a pas d'énergie calorifique directement échangée entre le fluide et la roue.
 - Cependant le fluide peut recevoir de la chaleur naissant de la **dégradation** d'une partie de l'énergie cinétique \Leftarrow travail des **forces de frottement** liées à la nature visqueuse du fluide.
Phénomène de **dissipation** principalement localisé près des parois = transformation de la forme d'énergie et **non transfert** de l'énergie (« pertes » \Rightarrow rendement).
 - Faible surface des parois en rapport avec les grands débits rendent les échanges de chaleur avec l'extérieur négligeable \Rightarrow parois considérées comme **adiabatiques**

- **Le stator :**

- **Rôle : modifier la forme d'énergie** (énergie cinétique en pression, ou inversement).
 - Il existe comme pour la roue mobile une force exercée par le fluide sur les aubages, liée à la déflexion de l'écoulement.
 - Par contre l'aubage étant fixe, il n'y a pas de déplacement du point d'application de la force. Donc pas de travail => **pas d'échange d'énergie**
- **Redresseur de compresseur axial :**
 - Situé en aval de la roue mobile
 - Rôle : redresser l'écoulement vers la direction axial, transformant ainsi l'énergie cinétique de la composante giratoire de vitesse en pression statique.
 - « Orienter » le fluide dans une direction compatible avec le prochain étage.
- **Distributeur de turbine axiale :**
 - Situé en amont de la roue mobile
 - Rôle : provoquer une giration de l'écoulement, transformant ainsi une partie de l'énergie de pression statique disponible sous forme d'énergie cinétique. Cette énergie est ensuite récupérée au niveau de la roue mobile.
- **Diffuseur de compresseur centrifuge :**
 - Récupération de pression statique avec l'augmentation de la section de passage (rayon).

Courbes caractéristiques

- Compresseurs et turbines sont en général calculés pour un point de fonctionnement (débit massique \dot{m} et taux de pression Π) où le rendement est maximal : c'est le **point de fonctionnement nominal**.
- Il est cependant intéressant de connaître le comportement de la machine à d'autres débits, d'où la notion de **plage de fonctionnement**. C'est la fourchette de débit où la machine conserve un taux de pression acceptable avec un rendement acceptable. Ce fonctionnement **hors adaptation** est illustré sur les courbes caractéristiques.
- Actuellement, les recherches sont largement orientées sur l'extension des plages de fonctionnement :
 - Interaction rotor/stator – rôle des effets potentiel dans l'amorce du décollement tournant
 - Traitement du carter pour profiter de son interaction avec les écoulement de jeux.
But : repousser la zone de pompage.

❖ Courbes caractéristiques des compresseurs

Débit

$$\dot{m}_{red} = \frac{\dot{m} \sqrt{T_{t1}}}{p_{t1}}$$

Taux de pression

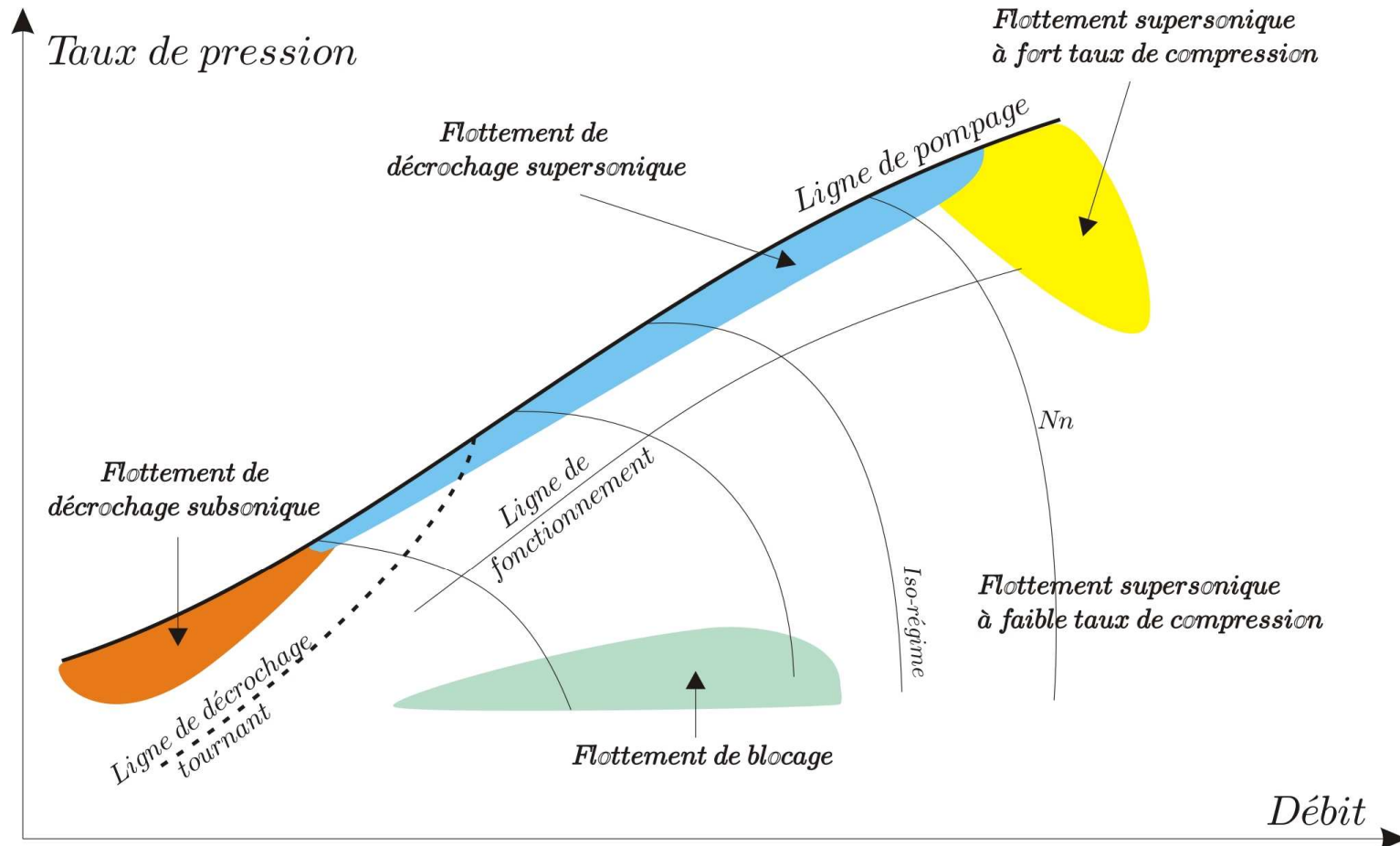
$$\Pi = \frac{p_{t2}}{p_{t1}}$$

Rendement isentropique

$$\eta_{is} = \frac{\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{t2}}{T_{t1}} - 1}$$

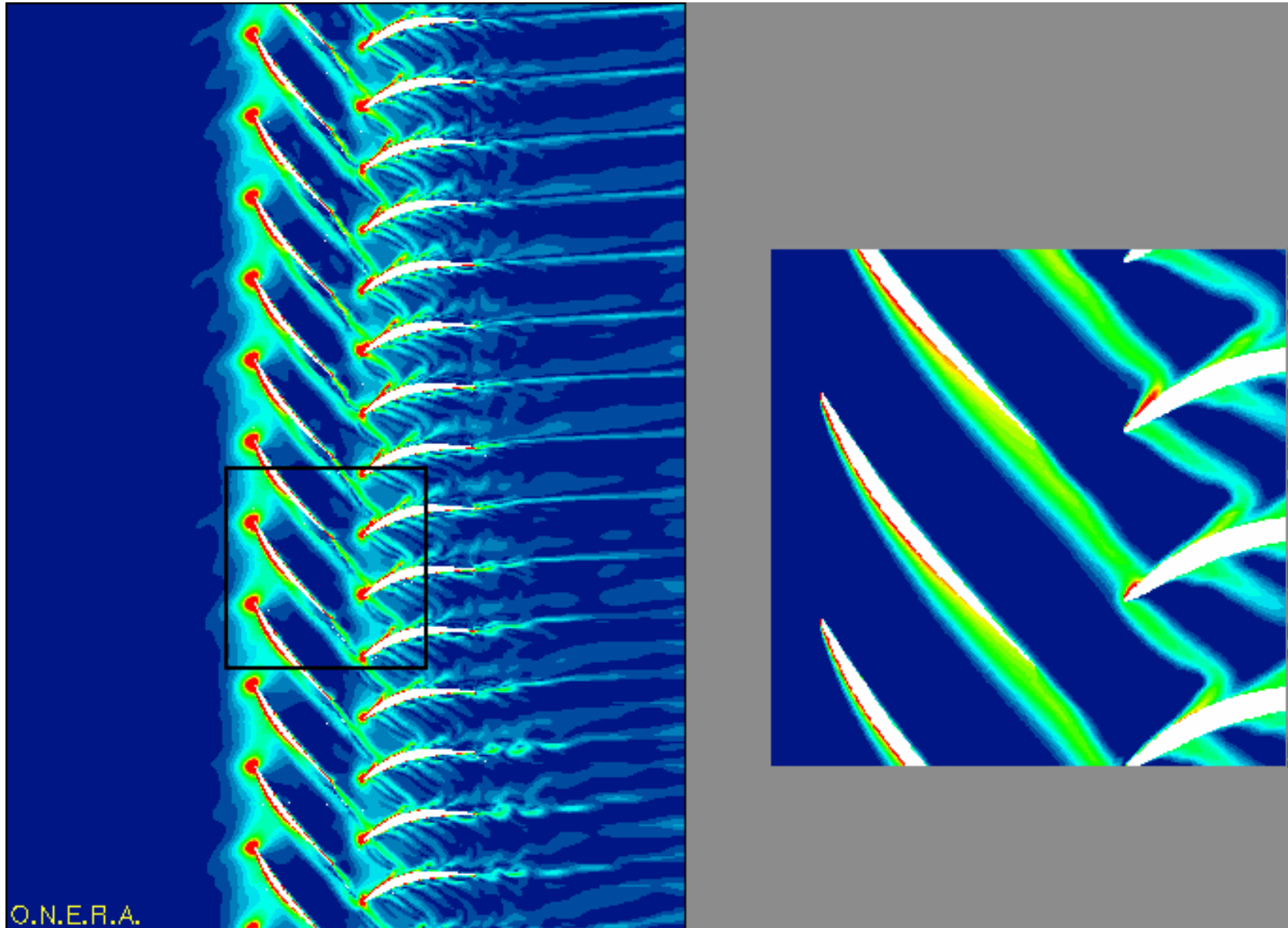
Vitesse de rotation

$$\frac{N}{\sqrt{T_{t1}}}$$



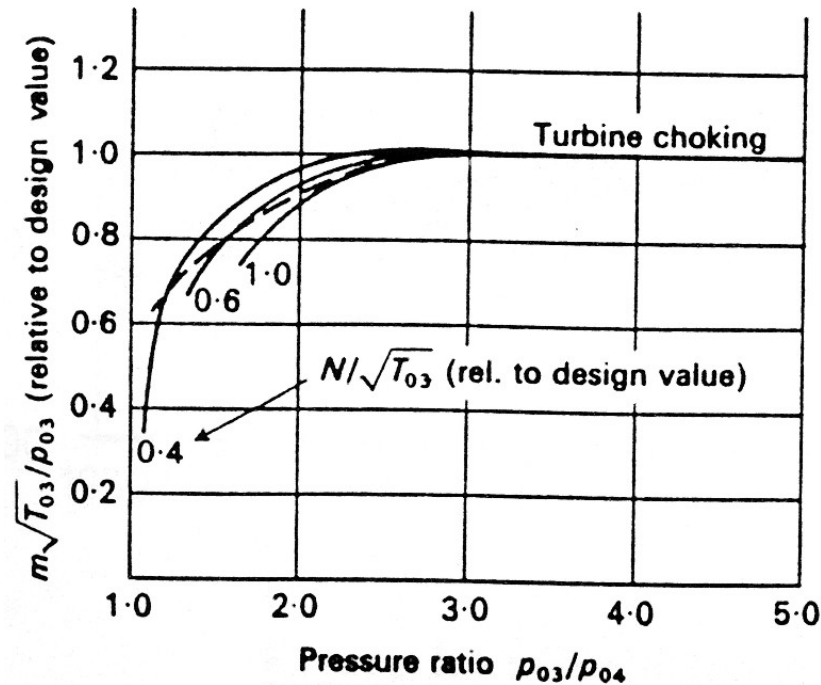
- Exemple de déclenchement d'un décollement tournant

Thèse : Nicolas Gourdin – ONERA/ECL - calcul elsA 2,5D - compresseur subsonique CME2 de Snecma Moteurs

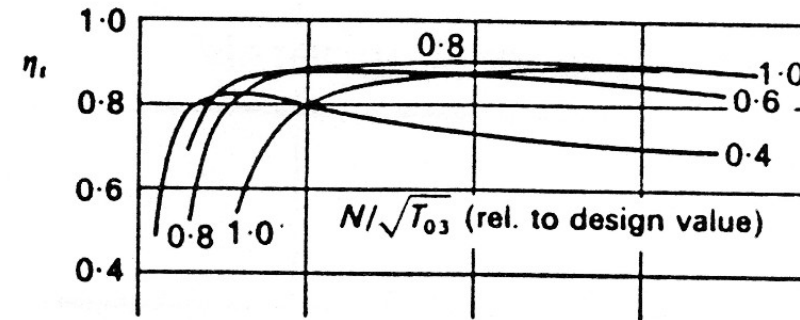


❖ Courbes caractéristiques des turbines

Débit réduit



Rendement



- Asymptote commune, indépendante de la vitesse de rotation => blocage sonique dans distributeur (partie fixe)
- Plage de rendement très étalées => caractère accéléré de l'écoulement au passage des aubes (contrairement aux compresseurs où l'écoulement décélère)

Approche 1D, 2D, 2.5D et 3D

❖ Écoulement réel dans une turbomachine complexe :

- tridimensionnel
- visqueux
- instationnaire

❖ Définition de surfaces «méridienne» et «aubes-à-aubes»

- Surface méridienne
- Surface aubes-à-aubes

2^{ème} partie - Analyse thermodynamique monodimensionnelle

Analyse thermodynamique 1D

- ❖ Introduction
- ❖ **Analyse thermodynamique monodimensionnelle**
 - Équations de conservation de base
 - Bilan des différentes contributions
 - Équation de l'entropie (équations de Gibbs)
 - Travail mécanique et travail utile
 - Conditions d'arrêt
 - Intérêt du diagramme entropique et enthalpique
 - Rendements isentropiques
 - Rendements polytropiques
- ❖ Analyse de l'écoulement dans le plan circonférentiel
- ❖ Équation de l'équilibre radial simplifié

Équations de conservation de base

❖ Équations de conservation de l'énergie totale

$$\frac{de}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{dw_e}{dt} \quad \text{forme locale générale}$$

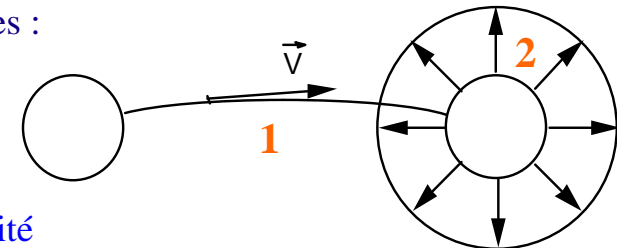
- e est l'énergie interne par unité de masse (qui n'inclue pas l'énergie cinétique du mouvement d'ensemble macroscopique des molécules, mais uniquement l'énergie cinétique liée à l'agitation de nature aléatoire de celles-ci)
- q représente l'énergie calorifique massique échangée avec l'extérieur
- w_e est le travail des forces extérieures par unité de masse. Après utilisation de l'équation de continuité, on a :

$$\frac{dw_e}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{V} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\bar{\tau} \cdot \vec{V}) - \frac{\vec{V}}{\rho} \operatorname{grad} p - p \frac{d(1/\rho)}{dt}$$

- \vec{f} représente les forces extérieures par unité de masse, appliquées sous forme volumique
- $\bar{\tau}$ est tenseur des contraintes visqueuses
- Le travail des forces de pression comporte 2 termes :

1 $-\frac{\vec{V}}{\rho} \operatorname{grad} p$ qui est un terme de transport

2 $-p \frac{d(1/\rho)}{dt}$ qui est un terme de compressibilité



- Expression adaptée à un système ouvert, en introduisant l'enthalpie (h):

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

- L'équation d'énergie devient :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\bar{\tau} \cdot \vec{V}) + \vec{f} \cdot \vec{V} + \frac{dq}{dt}$$

- En exprimant cette équation sous la forme :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{dw_T}{dt}$$

- On a donc par identification :

$$\frac{dw_T}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{V} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\bar{\tau} \cdot \vec{V}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

où dw_T/dt représente la puissance dite utile par unité de masse

❖ Équations de conservation de l'énergie cinétique

- Cette équation peut se substituer à l'équation de la dynamique ou à celle de la quantité de mouvement. Elle s'exprime par :

$$\frac{d(V^2/2)}{dt} = \frac{dw_e}{dt} + \frac{dw_i}{dt}$$

puissance des forces extérieures

puissance des forces intérieures

$$\frac{dw_i}{dt} = -\frac{\bar{\sigma}:\bar{D}}{\rho} = -\frac{\bar{\tau}:\bar{D}}{\rho} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \bar{V} = -\frac{\bar{\tau}:\bar{D}}{\rho} + p \frac{d(1/\rho)}{dt}$$

➤ où \bar{D} est le tenseur des déformations : $\bar{D} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \bar{V} + {}^t \operatorname{grad} \bar{V})$

- Soit, finalement :

$$\frac{d(V^2/2)}{dt} = \underbrace{\bar{f} \cdot \bar{V}}_{\text{travail des forces de volume}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\bar{\tau} \cdot \bar{V})}_{\text{travail des forces visqueuses}} - \underbrace{\frac{\bar{V}}{\rho} \operatorname{grad} p}_{\text{travail des forces de pression (transport)}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \bar{\tau}:\bar{D}}_{\text{dissipation d'énergie cinétique par viscosité}}$$

- $\operatorname{div}(\bar{\tau} \bar{V})/\rho$ = terme de production dû au travail des forces extérieures de viscosité
- $\bar{\tau}:\bar{D}/\rho$ = terme de dissipation interne (irréversibilité mécanique) dû au travail intérieur de la viscosité

❖ Équations de conservation de l'énergie interne

- Cette équation s'obtient directement en retranchant membre à membre les deux équations précédentes :

$$\frac{de}{dt} = \frac{dq}{dt} - \frac{dw_i}{dt}$$

- Soit :

$$\frac{de}{dt} = \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{\text{apport extérieur de chaleur}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \tau : D}_{\text{dissipation mécanique}} - \underbrace{p \frac{d(1/\rho)}{dt}}_{\text{travail de compression (dit volumique)}}$$

- **Remarque :** dans l'équation de l'énergie totale les termes de pression interviennent dans le travail surfacique extérieur : la pression est donc une *pression extérieure*. Dans l'équation de l'énergie interne, ces termes proviennent du travail des forces internes : la pression est donc une *pression intérieure*.

- Expression adaptée à un système ouvert (en ajoutant $\frac{d(p/\rho)}{dt}$ aux 2 membres) :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho} \tau : D$$

Bilan des différentes contributions

Énergie totale

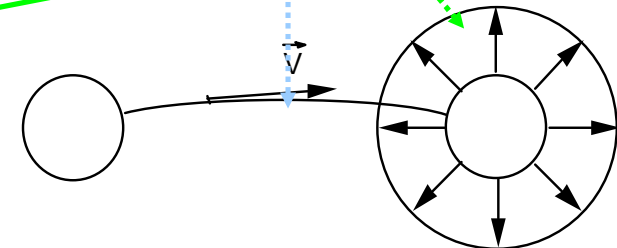
$$\frac{de}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt} = \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{\text{apport extérieur de chaleur}} + \underbrace{\vec{f} \cdot \vec{V}}_{\text{travail des forces de volume}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\overline{\overline{\tau}} \cdot \vec{V})}_{\text{travail des forces visqueuses}} - \underbrace{\frac{\vec{V}}{\rho} \operatorname{grad} p}_{\text{travail des forces de pression (transport)}} - \underbrace{p \frac{d(1/\rho)}{dt}}_{\text{travail de compression (dit volumique)}}$$

Énergie cinétique

$$\frac{d(V^2/2)}{dt} = \underbrace{\vec{f} \cdot \vec{V}}_{\text{travail des forces de volume}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\overline{\overline{\tau}} \cdot \vec{V})}_{\text{travail des forces visqueuses}} - \underbrace{\frac{\vec{V}}{\rho} \operatorname{grad} p}_{\text{travail des forces de pression (transport)}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}}}_{\text{dissipation d'énergie cinétique par viscosité}}$$

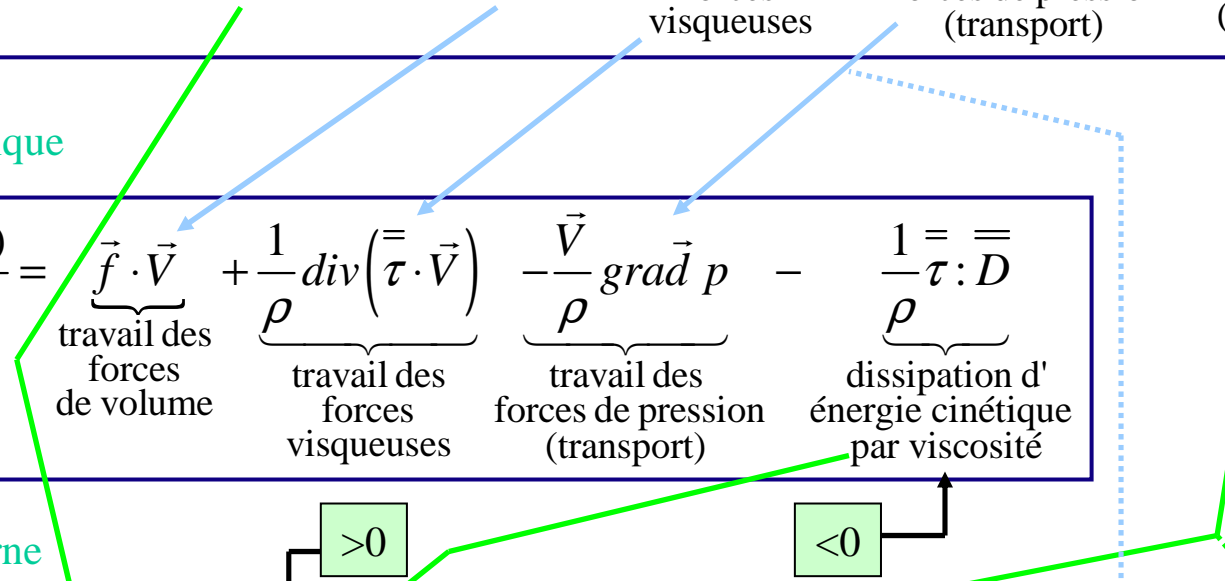
Énergie interne

$$\frac{de}{dt} = \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{\text{apport extérieur de chaleur}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}}}_{\text{dissipation mécanique}} - \underbrace{p \frac{d(1/\rho)}{dt}}_{\text{travail de compression (dit volumique)}}$$



>0

<0



Équation de l'entropie (équations de Gibbs)

- En divisant l'équation de l'énergie interne par T en tenant compte de :

$$\frac{\text{div } \vec{q}}{T} = \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \vec{q} \cdot \text{grad} \frac{1}{T}$$

$$\rightarrow \frac{1}{T} \left(\frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} \right) = \underbrace{\frac{1}{T} \frac{dq}{dt}}_{\text{apport de chaleur}} + \underbrace{\frac{1}{T} \frac{\tau : \bar{D}}{\rho}}_{\text{irréversibilité mécanique}} = \underbrace{\frac{r}{T} + \frac{1}{\rho} \text{div} \frac{-\vec{q}}{T}}_{\text{apport de chaleur réversible}} + \underbrace{\frac{\vec{q}}{\rho} \cdot \text{grad} \frac{1}{T}}_{\text{irréversibilité thermique}} + \underbrace{\frac{1}{T} \frac{\tau : \bar{D}}{\rho}}_{\text{irréversibilité mécanique}}$$

- Le deuxième membre de l'équation précédente s'identifie comme la **variation d'entropie** du système par unité de masse $\frac{ds}{dt}$
- D'où la première équation de Gibbs :

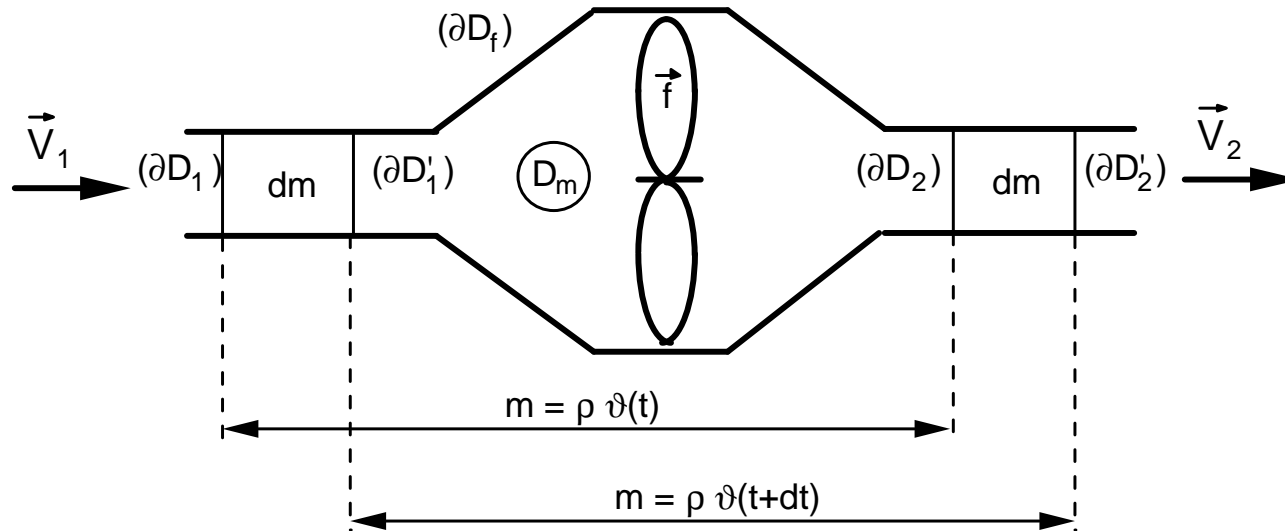
$$\boxed{\frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} = T \frac{ds}{dt}}$$

- La deuxième équation de Gibbs s'obtient en introduisant l'enthalpie :

$$\boxed{\frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = T \frac{ds}{dt}}$$

Travail mécanique et travail utile

❖ Interprétation physique du travail utile



- masse de gaz $m = \rho \vartheta(t)$, comprise entre les sections d'entrée ∂D_1 et de sortie ∂D_2 et occupant le domaine matériel D_m .
- à l'instant $t+dt$ cette masse de fluide $m = \rho \vartheta(t+dt)$ se sera déplacée vers l'aval.

Puissance utile échangée avec cette masse m :

$$P = \frac{dW_T}{dt} = \int_{D_m} \rho \frac{dw_T}{dt} d\vartheta$$

- Expression du travail utile, vue précédemment :

$$\frac{dw_T}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{V} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\bar{\tau} \cdot \vec{V}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{cf. énergie totale})$$

- Donc :

$$P = \int_{D_m} \rho \frac{dw_T}{dt} d\vartheta = \int_{D_m} \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) d\vartheta + \int_{\partial D_m} \bar{\tau} \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_{D_m} \frac{\partial p}{\partial t} d\vartheta$$

- Avec un écoulement permanent, une condition d'adhérence imposant une vitesse nulle sur les parois fixes (∂D_f) et des tensions visqueuses négligeables sur ∂D_1 et ∂D_2 (au sein du fluide), on a :

$$\boxed{\frac{dW_T}{dt} \approx \int_{D_m} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\vartheta}$$

- ou \vec{f} représente les forces de volume autres que les forces de pesanteur, c.à.d. dans notre cas les forces exercées par les aubages de la machine sur le fluide.

Le **travail utile** représente donc le **travail échangé avec la machine**.

❖ Autres expressions du travail mécanique et du travail utile

• Travail mécanique :

- En ajoutant les variations d'énergie cinétique dans l'équation de l'énergie interne :

$$\frac{de}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho} \tau : \overline{D} - p \frac{d(1/\rho)}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt}$$

- et, en identifiant avec l'équation de l'énergie totale :

$$\frac{dw_e}{dt} = \frac{dw_d}{dt} - p \frac{d(1/\rho)}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt}$$

• Travail utile :

- En effectuant la même opération avec l'équation d'enthalpie :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{dw_d}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt}$$

- et, en identifiant avec l'équation de l'énergie totale (enthalpie) :

$$\frac{dw_T}{dt} = \frac{dw_d}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{d(V^2/2)}{dt}$$

❖ Différence entre puissance mécanique et puissance utile

$$\underbrace{\frac{dw_T}{dt}}_{\text{puissance utile}} = \underbrace{\frac{dw_e}{dt}}_{\text{puissance mécanique}} + \underbrace{\frac{d(p/\rho)}{dt}}_{\text{puissance de transvasement}}$$

- soit, en intégrant sur le domaine D_m défini précédemment :

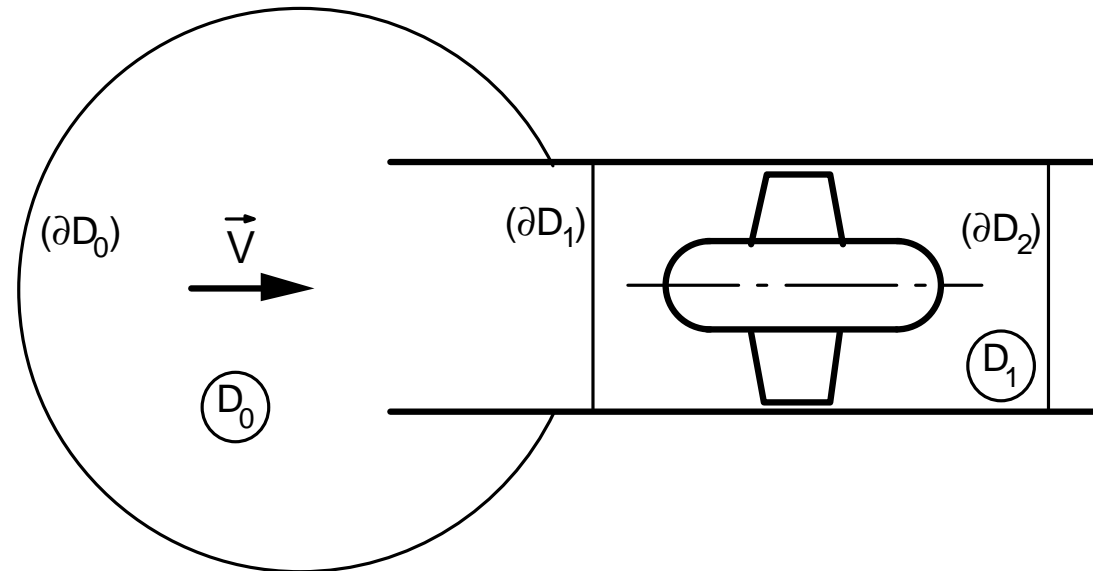
$$\begin{aligned} \frac{dW_T}{dt} - \frac{dW_e}{dt} &= \int_{D_m} \rho \frac{d(p/\rho)}{dt} d\vartheta \\ &= \frac{d}{dt} \int_{D_m} \rho \frac{p}{\rho} d\vartheta = \int_{D_m} \frac{\partial p}{\partial t} d\vartheta + \int_{\partial D_m} p \vec{V} \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

- Si on fait l'hypothèse d'un écoulement permanent, et si nous tenons compte du fait que la condition d'adhérence impose une vitesse nulle sur les parois fixes (∂D_f), il vient :

$$\frac{dW_T}{dt} - \frac{dW_e}{dt} = \int_{\partial D_1 \cup \partial D_2} p \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

- Le travail utile diffère donc du travail mécanique par le travail des forces de pression sur les surfaces libres d'entrée et de sortie que l'on appelle **travail de transvasement**.

- *Illustration : Compresseur et son entrée d'air*



- *domaine D1*: travail utile échangé (par l'intermédiaire des pales mobiles) et travail des forces de pression sur les surfaces de contrôle (∂D_1) et (∂D_2) (car les pressions p_1 et p_2 sont différentes).
 $\rightarrow \Delta w_T \neq 0$ et $\Delta w_e \neq 0$
- *domaine D0* : aucun travail échangé avec les parois matérielles
Mais : puissance des forces de pression nulle sur (∂D_0) (si on la situe suffisamment loin pour considérer que la vitesse du fluide y est nulle), elle ne l'est pas sur (∂D_1) . $\rightarrow \Delta w_T = 0$ et $\Delta w_e \neq 0$

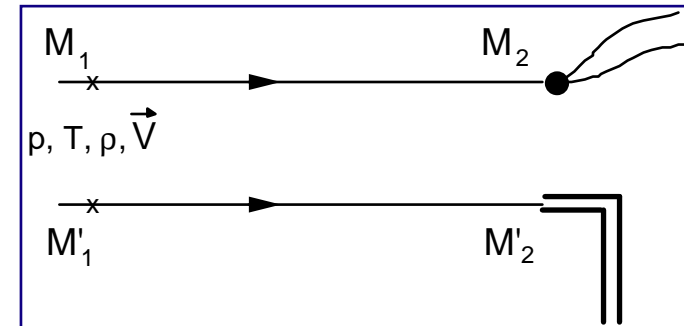
Conditions d'arrêt

❖ Notion de variable d'arrêt absolue

- Écoulement uniforme (p, T, ρ) et permanent de fluide
- Pas d'échange de travail ni de chaleur avec l'extérieur
- Plaçons y une sonde de température et de pression

- Équation de conservation de l'énergie entre les *points 1 et 2*, sur ces 2 lignes de courant

$$\Delta h + \Delta(V^2/2) = \Delta w_T + \Delta q = 0$$



- L'enthalpie au *point 2* englobe donc à la fois l'enthalpie statique et l'énergie cinétique en *1*, d'où son nom **d'enthalpie totale**. Mais, c'est aussi l'enthalpie obtenue après avoir arrêté le fluide, d'où son nom **d'enthalpie d'arrêt**.

$$h_0 = h + V^2/2$$

❖ Définition des variables d'arrêt

- Les conditions d'arrêt sont les conditions que l'on obtiendrait par une transformation fictive ramenant isentropiquement (réversiblement et sans échange de chaleur) et sans échange de travail utile, le fluide à vitesse nulle.

- Température d'arrêt

- Dans le cas d'un gaz parfait : $h = C_p(T) \cdot T$

$$\rightarrow \frac{h_0}{C_p(T)} = T + \frac{V^2}{2C_p(T)}$$

- En considérant que : $h_0 = C_p(T_0) \cdot T_0 \approx C_p(T) \cdot T_0 \approx C_p \cdot T_0$

ainsi :

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2C_p}$$

- T est la température statique qui représente l'énergie cinétique moyenne d'agitation moléculaire (de nature aléatoire).
- $V^2/2C_p$ est la température dynamique qui représente l'énergie cinétique du mouvement d'ensemble des molécules.

- Pression et masse volumique d'arrêt

- En utilisant la définition précédente, qui exprime que l'on passe de l'état dynamique (p, r, T, V) à l'état d'arrêt ($p_0, r_0, T_0, 0$) par une transformation isentropique:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p_0 = p \left(1 + \frac{V^2}{2 C_p T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{V^2}{2 C_p T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

- Autre formulation

- En introduisant la notion de nombre de Mach : $M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma r T}}$

- Il vient : $\frac{V^2}{2 C_p T} = \frac{\gamma r}{2 C_p} \frac{V^2}{a^2} = \frac{\gamma-1}{2} M^2$

$$\rightarrow \boxed{T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)} \quad \boxed{\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad \boxed{p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

❖ Approximation pour un écoulement incompressible

- Les effets de compressibilité sont négligeables si le fluide se déplace à basse vitesse. On considère généralement que la limite acceptable de l'approximation est $M < 0,3$. Dans ce cas, pour l'air :

$$\frac{\gamma-1}{2} M^2 \approx \frac{0,4}{2} 0,3^2 \approx 0,02 \ll 1$$

- Soit en effectuant un développement limité au premier ordre :

$$p_0 \approx p \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) = p + \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{p}{\gamma r T} V^2$$

$$\rightarrow \boxed{p_0 \approx p + \frac{1}{2} \rho V^2}$$

❖ Cas de l'entropie

- L'entropie statique s'exprime, en fonction des variables p et ρ et de la définition des variables d'arrêt :

$$s = C_v \text{Log} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = C_v \text{Log} \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) = s_0$$

$$\boxed{s \equiv s_0}$$

- Ce résultat pouvait être prévu sans aucun calcul, car l'entropie étant associée à une quantité de chaleur (échangée ou produite par irréversibilités), elle ne dépend pas du repère considéré.

❖ Variables statiques et d'arrêt absolues ou relatives

- p_0 et T_0 sont les pression et température « ressenties » par des sondes fixes
- Pour mesurer les variables statiques, il ne faut pas modifier la dynamique du fluide.
 - Nécessité de sondes solidaires d'un référentiel lié au fluide (difficile).
 - En pratique: sondes de paroi parallèle à l'écoulement de fluide.

Si on se rappelle que le phénomène de pression résulte de l'intégrale des forces d'impact des molécules sur la paroi, alors :

- *capteur sur paroi parallèle au mouvement du fluide, la pression mesurée n'inclut que les chocs liés au mouvement aléatoire des molécules : c'est la **pression statique***
- *capteur sur paroi perpendiculaire au mouvement du fluide, la pression mesurée inclut à la fois les chocs liés au mouvement aléatoire des molécules et ceux liés à leur mouvement d'ensemble de vitesse : c'est la **pression totale**.*
- Lorsqu'une sonde est liée à un référentiel qui n'est ni fixe, ni solidaire des particules de fluide, elle mesure une quantité que l'on appelle **variable d'arrêt relative**.
 - **Exemple :** *pales d'un compresseur animées d'un mouvement de rotation uniforme :*
*Le fluide possède, dans le référentiel lié aux pales, une certaine vitesse W (dite vitesse relative, différente de la vitesse absolue V). La température "ressentie" par la pale au point d'arrêt est la **température d'arrêt relative** :*

$$T_{0_R} = T + W^2 / 2C_p$$

❖ Équation thermique d'état

- Pour un gaz parfait, la définition des variables d'arrêt entraîne :

$$\begin{aligned}
 p &= \rho r T \\
 &= \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot r \cdot T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \\
 &= \rho_0 r T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{p_0 = \rho_0 r T_0}$$

- Ce résultat est évident si on considère que l'état d'arrêt (même s'il est fictif) est un état au sens thermodynamique : les variables y caractérisant le fluide sont donc régies par l'équation thermique d'état.

❖ Expression du travail utile pour une transformation adiabatique

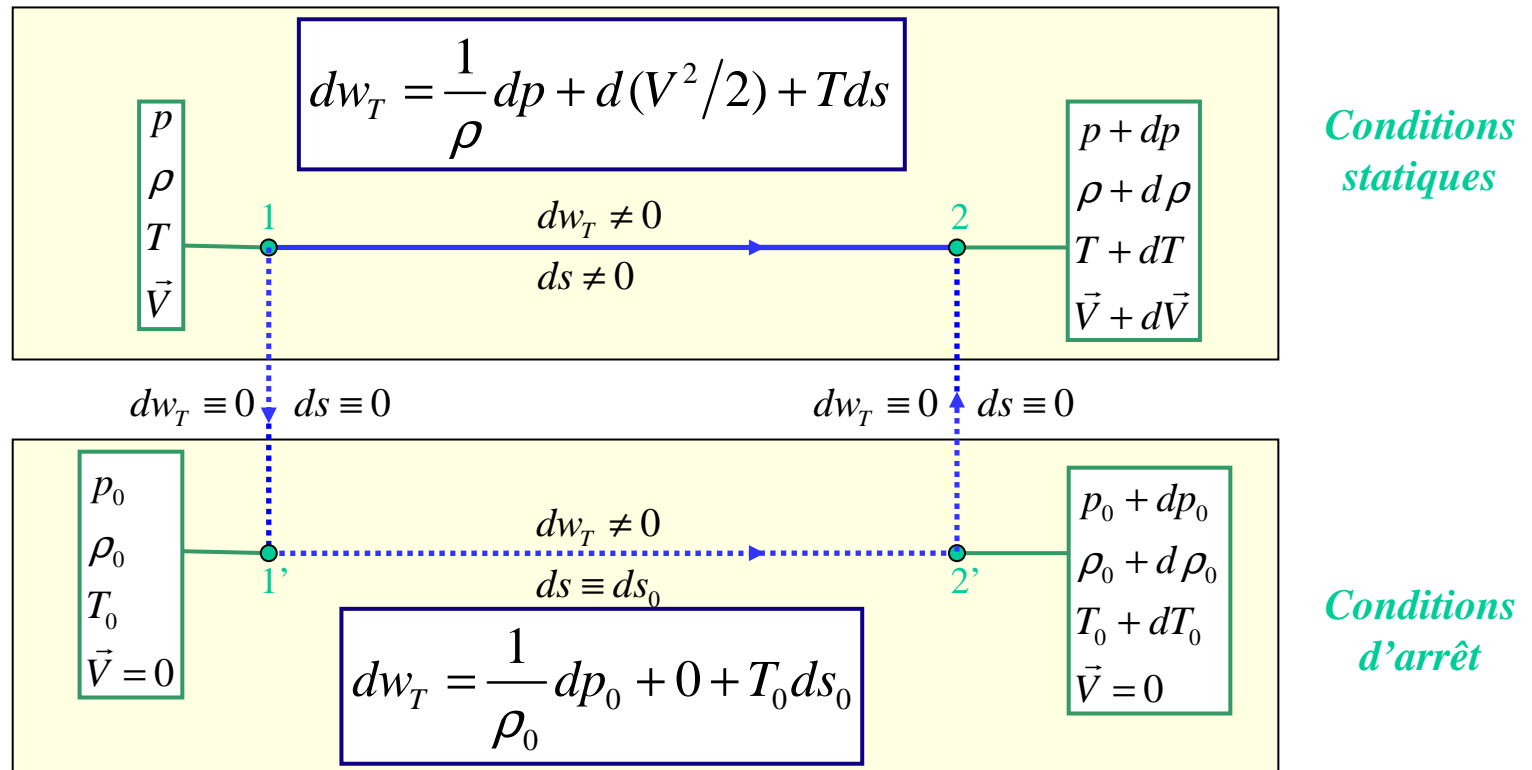
- Expression du travail utile et de l'entropie établies précédemment :

$$dw_T = \frac{1}{\rho} dp + d(V^2/2) + dw_d$$

$$ds = \underbrace{\frac{dq_{ext}}{T} \Big|_{rév} + \frac{\delta q_{ext}}{T} \Big|_{irrév}}_A + \frac{\delta q_{méca}}{T} \Big|_{irrév}$$

Pour un écoulement adiabatique, les irréversibilités de nature mécanique dw_d sont les seules causes d'augmentation d'entropie

- Transformation adiabatique $\Rightarrow A=0$, donc



- *Rappel* : Équation d'énergie exprimée avec l'enthalpie :

$$dh + d(V^2 / 2) = dq + dw_T$$

$$dh_0 = dq + dw_T$$

- Cas adiabatique : $dq=0$, donc :

$$dh_0 = dw_T$$


$$dh_0 = C_p dT_0 = dw_T = \frac{1}{\rho_0} dp_0 + T_0 ds_0$$

← Pertes par dissipation

- Cas transfo isentropique (adiabatique + réversible) entre 1 et 2, avec un gaz parfait :

$$\Delta W_T = C_p (T_{02} - T_{01}) = C_p T_{01} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right) = C_p T_{01} \left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

$$\Delta W_T = C_p T_{01} \left(\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Isentrop. 

- Compression : $\Pi > 1 \Rightarrow T_{02} > T_{01} \Rightarrow \Delta W_{T12} > 0$
- Détente : $\Pi < 1 \Rightarrow T_{02} < T_{01} \Rightarrow \Delta W_{T12} < 0$
- **Importance de la température d'entrée**

Diagrammes entropique (T,s) et enthalpique (h,s)

- Diagrammes couramment utilisés pour représenter les transformations.
- Si gaz parfaits évoluant dans une plage de températures limitée,
 - température et enthalpie sont identiques à une constante près :

$$h = h(T) = C_p(T) \cdot T \approx C_p T$$

❖ Intérêt d'un tel diagramme

- les ordonnées représentent l'énergie du système. On peut donc directement y visualiser :

- pour une transformation adiabatique : $\Delta h = \Delta w_T + \Delta q = \Delta w_T$

Les **échanges de travail utile**

- pour une transformation à p constante : $\Delta h = \Delta w_T + \Delta q = \Delta q$

Les **échanges de chaleur**

- pour un système isolé : $\Delta h = 0$:

Les **transferts internes** (*énergie cinétique* \Leftrightarrow *énergie de pression*)

- dans le cas d'une transformation adiabatique, les abscisses représentent le degré d'irréversibilité de la transformation.



compressions ou détente usuelles : visualisation directe des transferts d'énergie, **quantitativement** en ordonnées et **qualitativement** en abscisses.

❖ Quelques iso-valeurs intéressantes

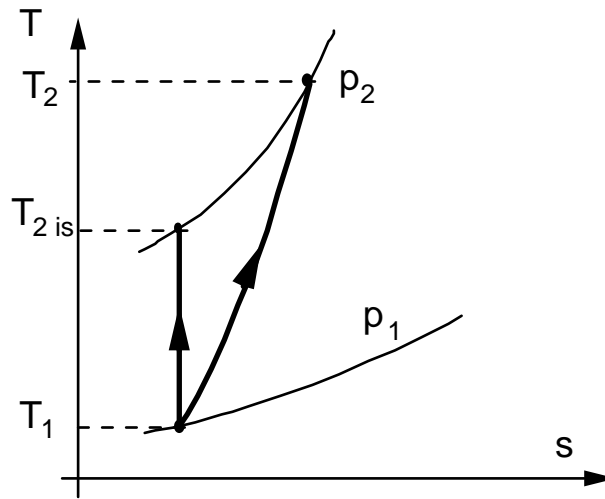
- *Isentropiques* :
les compressions et détente usuelles réversibles sont représentées par des **droites verticales**.
- *Adiabatiques irréversibles* :
selon le second principe $\Delta w_d > 0$, que ce soient des compressions ou des détente, **l'entropie augmente**.
- *Isothermes (ou isenthalpiques)* :
ce sont des **droites horizontales**.
- *Isobares (cas des apports de chaleur usuels)* :
Après intégration de l'équation de Gibbs, on montre que les isobares sont des **exponentielles croissantes** se déduisant l'une de l'autre par **translation horizontale**.

Remarques :

- l'écart vertical entre deux isobares augmente avec la température : ce résultat est déterminant pour comprendre le fonctionnement d'une turbine à gaz.
- dans le cas d'un **gaz non parfait**, il est indispensable d'utiliser le diagramme enthalpique, où toutes ces courbes sont **distordues**.
ex : vapeur d'eau utilisée dans les turbines à vapeur (le diagramme enthalpique correspondant est le diagramme de Mollier).

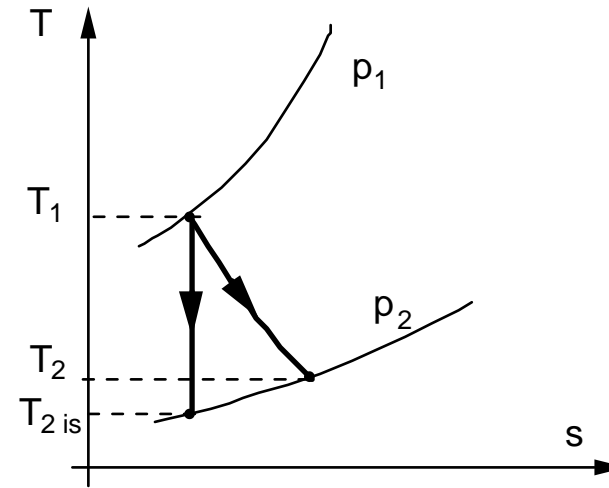
Rendements isentropiques

- Ces rendements s'appellent isentropiques parce qu'ils comparent la transformation réelle à une transformation isentropique fictive.



compression

$$\eta_c = \frac{\Delta w_{Tis}}{\Delta w_T} = \frac{h_{2is} - h_1}{h_2 - h_1}$$



détente

$$\eta_T = \frac{\Delta w_T}{\Delta w_{Tis}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2is} - h_1}$$

- Pour un gaz parfait à Cp constant, ces rendements peuvent aussi s'écrire :

$$\eta_c = \frac{T_{2is} - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$\eta_T = \frac{T_2 - T_1}{T_{2is} - T_1}$$

❖ Rendements isentropiques total-à-total

- Les rendements isentropiques total-à-total d'une roue mobile sont définis de façon analogue à la formulation initiale, mais en utilisant les variables d'arrêt pour conserver leur sens physique de rendements énergétiques globaux (entrée-sortie).

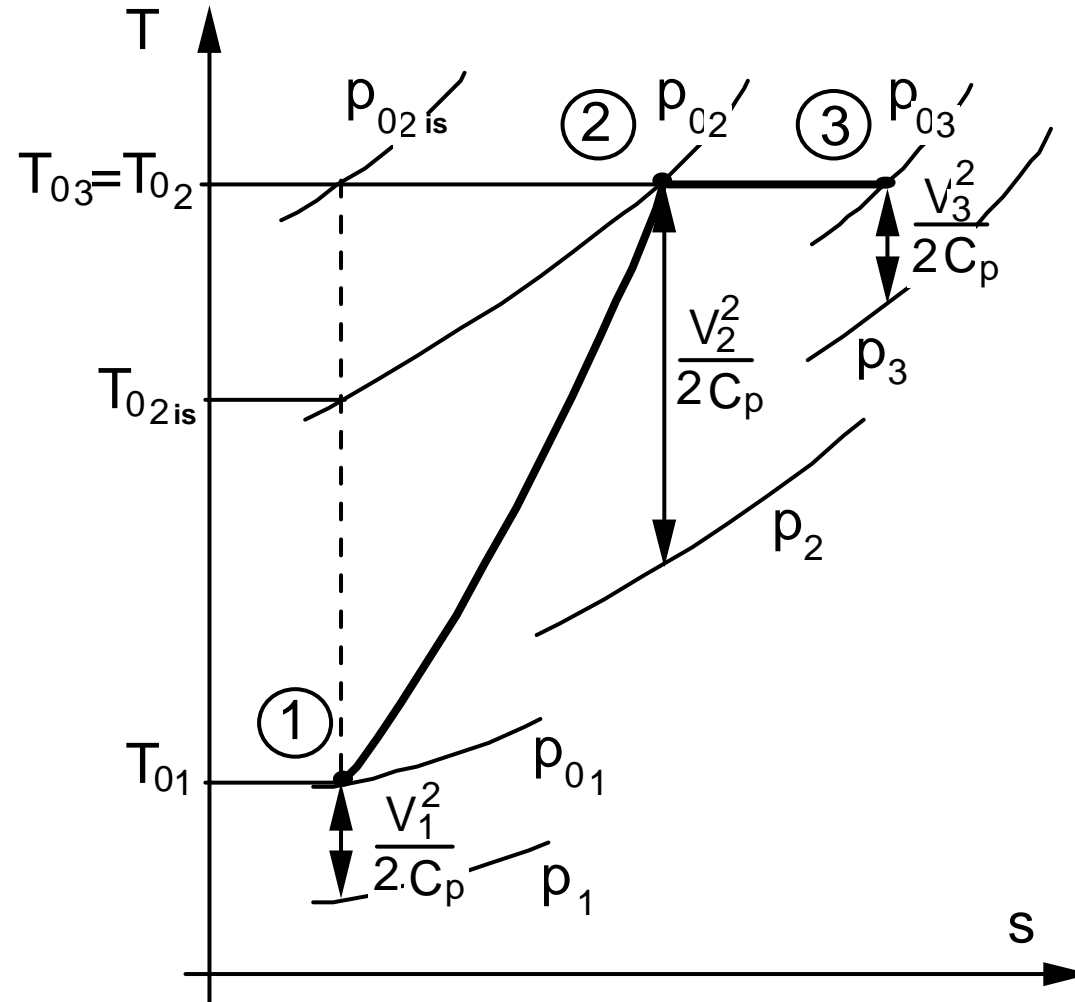
$$\eta_c = \frac{h_{02is} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} \quad \text{pour une compression}$$

$$\eta_T = \frac{h_{02} - h_{01}}{h_{02is} - h_{01}} \quad \text{pour une détente}$$

- Dans le cas où C_p constant \Rightarrow rendements définis avec les températures d'arrêt.
- Étage de turbomachine :
 - la partie mobile : transfert d'énergie entre la machine et le fluide. En effet, les pales étant mobiles, l'ensemble des forces de pression et visqueuses exercées sur le fluide travaillent.
 - la partie fixe ne réalise qu'une transformation interne de la forme d'énergie du fluide (pas d'échange d'énergie avec la machine).
Existence de forces (fixes) entre les pales et le fluide \Rightarrow pas de travail.
le premier principe exprime que : $\Delta h_0 = \Delta w_T + \Delta q \equiv 0$
il n'est pas possible de caractériser le degré d'irréversibilité de la transformation par ce type de rendement. On utilise les rendements isentropiques statique à statique

Analyse thermodynamique 1D

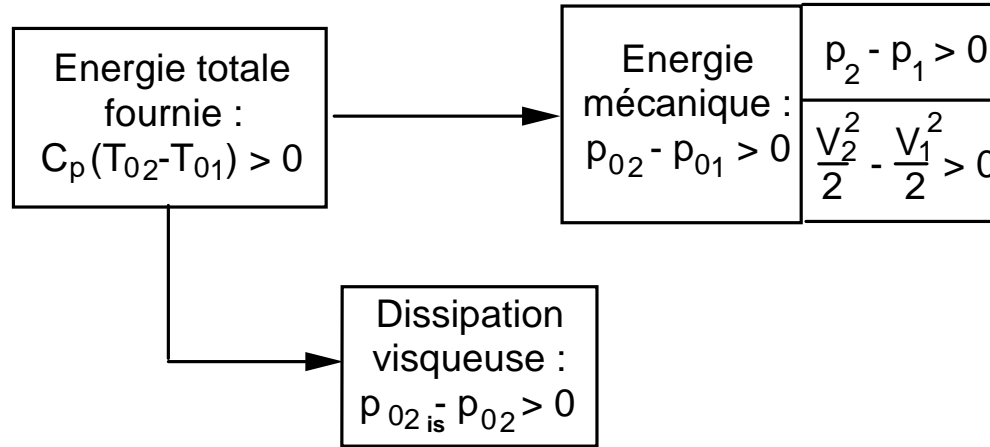
❖ Étage de compresseur



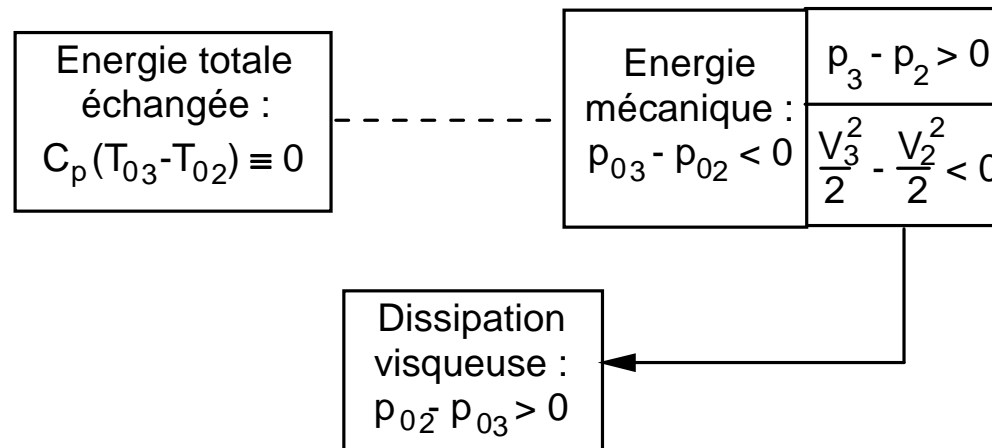
$$\eta_c = \frac{T_{02is} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}}$$

❖ Étage de compresseur (suite)

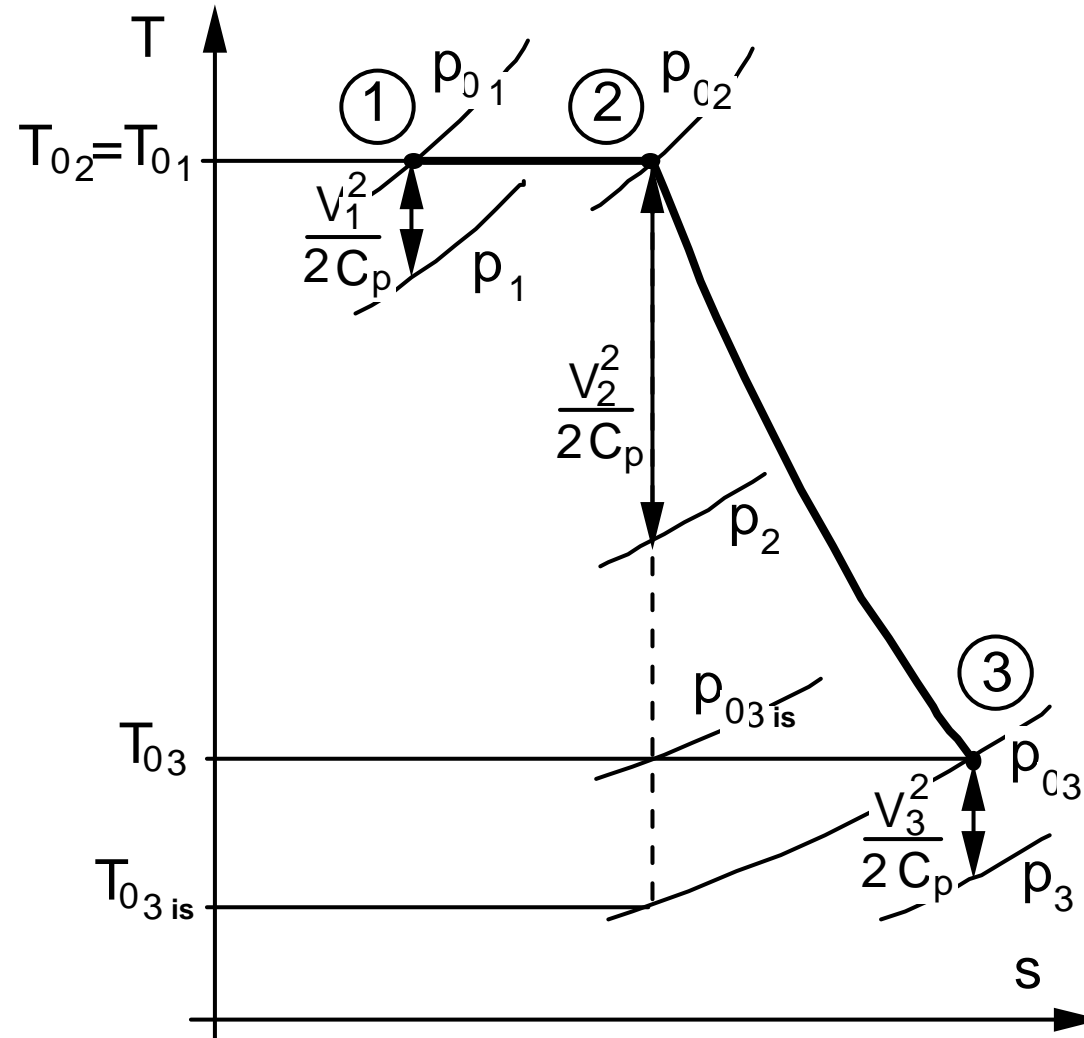
Roue mobile



Roue fixe



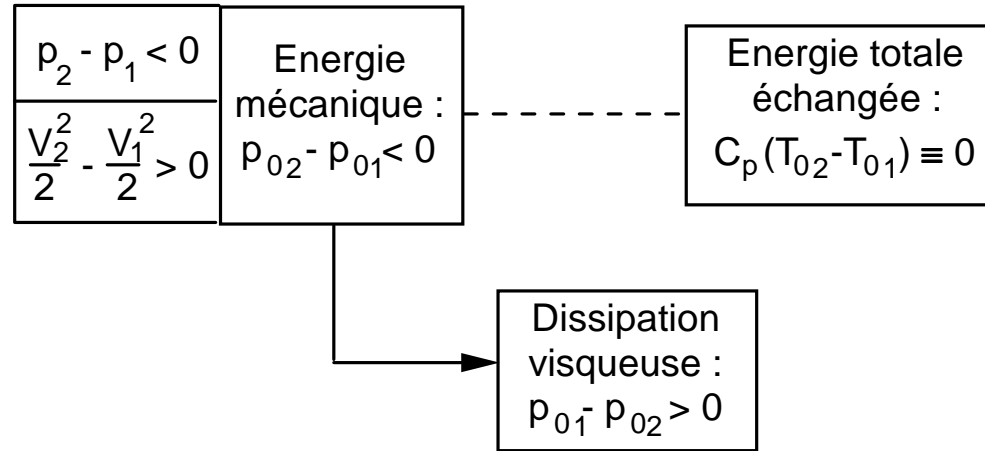
❖ Étage de turbine



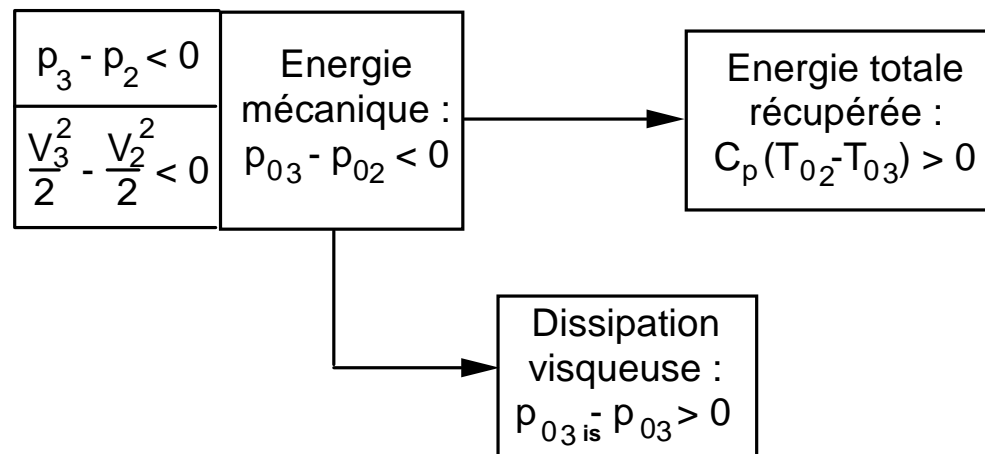
$$\eta_t = \frac{T_{02} - T_{01}}{T_{02is} - T_{01}}$$

❖ Étage de turbine (suite)

Roue fixe



Roue mobile



Rendements polytropiques

❖ Processus polytropiques

- Une définition :

- une transformation polytropique est une transformation au cours de laquelle le rapport entre la **chaleur totale échangée**, et la **variation d'enthalpie** est égale à une constante β .

$$\frac{dq + dw_d}{dh_0} = \beta = \text{constante}$$

- Pour un gaz parfait : $dh_0 = dw_T + dq = dp/\rho + d(v^2/2) + dw_d + dq$

(sans variation d'Ec) $\Rightarrow \beta = \frac{dh - dp/\rho}{dh} = \frac{C_p dT - dp/\rho}{C_p dT}$

avec : $p = \rho r T \Rightarrow dT = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\rho} dp + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \right)$

d'où : $\frac{C_p}{r} \left(\frac{1}{\rho} dp + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) (\beta - 1) = -\frac{1}{\rho} dp$

$$\Leftrightarrow \frac{C_p}{r} (\beta - 1) \cdot p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{C_p}{r} (\beta - 1) + 1 \right) \frac{1}{\rho} dp = 0$$

soit, en utilisant la relation de Mayer : $C_p - C_v = r \Rightarrow \frac{C_p}{r} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$

et en multipliant toute l'équation par $\frac{\rho}{p} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma\beta - 1}$,

il vient : $\frac{dp}{p} + \frac{\gamma(\beta - 1)}{\gamma\beta - 1} \cdot \frac{d(1/\rho)}{1/\rho} = 0$

Soit, en posant : $n = \frac{\gamma(\beta - 1)}{\gamma\beta - 1}$

Et en intégrant $\Rightarrow \boxed{\frac{p}{\rho^n} = \text{constante}}$

On appelle n **exposant polytropique**, qui est donc constant tout le long de la transformation.

- Remarques sur la valeur de l'exposant polytropique :

- Transformation isotherme : $n_c = 1$
- Transformation adiabatique réversible : $n_c = \gamma$
- Compression : les phénomènes dissipatifs créent de la chaleur et éloignent encore plus la transformation adiabatique de l'isotherme (*on a un sur-échauffement par rapport à l'adiabatique réversible*). Donc : $n_c \geq \gamma$
- Détente: les phénomènes dissipatifs diminuent le refroidissement naturel de l'adiabatique réversible (*ils rapprochent la transformation réelle d'une transformation isotherme*). Donc : $1 \leq n_T \leq \gamma$

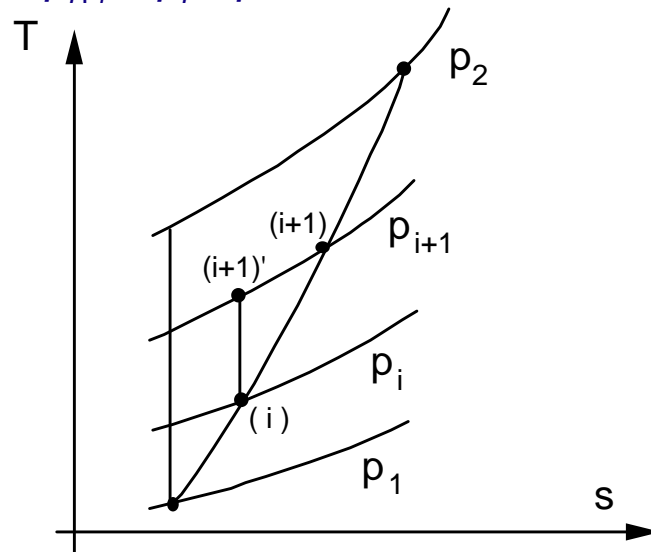
- Assimilation du processus adiabatique irréversible réel à un processus polytropique:

$$\frac{dq + dw_d}{dh_0} = \beta = \text{constante} = \text{coefficient de pertes}$$

- Avec des effets dissipatifs (pertes) répartis de manière "relativement" uniforme tout le long de la transformation, on peut assimiler le processus réel à un processus polytropique (cf. développement des couches limites et des pertes qu'elles génèrent, de façon relativement constante tout au long de la surface si le profil turbulent est établi).

❖ Rendements polytropiques

- Considérons une compression adiabatique irréversible de p_1 à p_2 , et soit un élément infinitésimal de cette transformation compris entre les pressions p_i et $p_{i+1} = p_i + dp$.



Le rendement isentropique de cette transformation élémentaire est, par définition :

$$\frac{h_{(i+1)'} - h_{(i)}}{h_{(i+1)} - h_{(i)}} = \frac{dh_{is}}{dh}$$

avec : $dh_{is} = dw_{T_{is}} + dq = dp/\rho$

$$\boxed{\eta_{P_c} = \frac{dp/\rho}{dh}}$$

- Ce rendement local, constant tout au long de la transformation, est appelé **rendement polytropique**.
- Pour une détente, on définit de façon analogue :

$$\boxed{\eta_{P_T} = \frac{dh}{dp/\rho}}$$

❖ Relations entre rendements et exposants polytropiques

- Rappel : $\beta = \frac{dq + dw_d}{dh} = \frac{dh - dp/\rho}{dh}$

- d'où, en utilisant l'expression du rendement polytropique :

- pour une compression : $\eta_{P_C} = 1 - \beta$

- pour une détente : $\eta_{P_T} = \frac{1}{1 - \beta}$

- Comme, par définition : $n = \frac{\gamma(\beta - 1)}{\gamma\beta - 1}$

$$\beta(n\gamma - \gamma) = n - \gamma \Rightarrow \beta = \frac{n - \gamma}{\gamma(n - 1)}$$

- d'où, pour un compresseur :

$$\eta_{P_C} = 1 - \beta = \frac{n(\gamma - 1)}{\gamma(n - 1)}$$

Ou bien :
$$\frac{n - 1}{n} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\eta_{P_C}}$$

- Pour une détente, on montre de manière analogue, que :

$$\frac{n - 1}{n} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \eta_{P_T}$$

❖ Relations entre rendements isentropiques et polytropiques

- Travail utile échanger au cours d'une **détente** : $\Delta w_T = C_p (T_2 - T_1)$

En utilisant le rendement isentropique :

$$\Delta w_T = C_p \eta_T (T_{2is} - T_1) = C_p \eta_T T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

En utilisant le rendement polytropique :

$$\Delta w_T = C_p T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = C_p T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right)$$

Avec : $\frac{n-1}{n} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \eta_{P_T}$

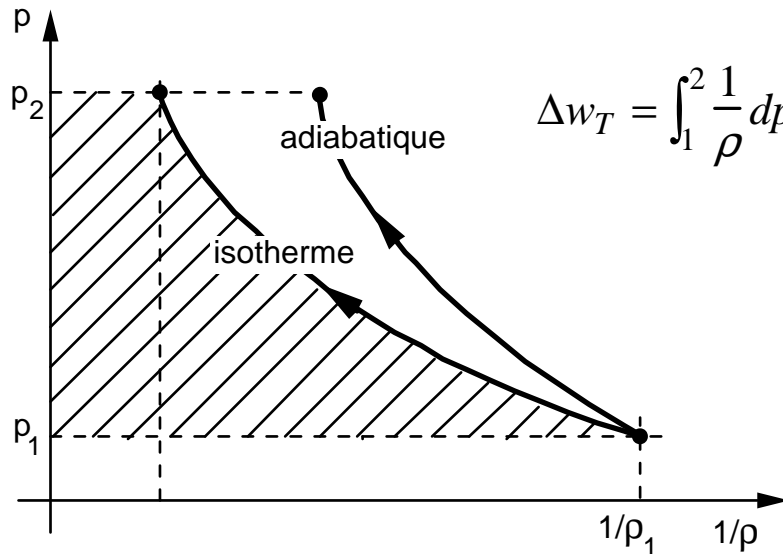
on montre que : $\eta_T > \eta_{P_T}$ \rightarrow $\eta_T = \eta_{P_T} \underbrace{(1 + f_\infty)}_{\text{facteur de récupération}}$, avec $f_\infty > 0$

- Dans le cas d'une **compression**, on montre, d'une manière analogue, que :

$$\eta_c < \eta_{P_c} \rightarrow \eta_c = \frac{\eta_{P_c}}{\underbrace{(1 + f_\infty)}_{\text{facteur de pertes}}}$$

❖ Interprétation

- Comparaison entre compression isotherme et adiabatique



$$p = \rho r T = \frac{r T}{1/\rho} \Rightarrow \left(\frac{dp}{d(1/\rho)} \right)_{Tct} = - \frac{p}{1/\rho}$$

$$p = \frac{K}{(1/\rho)^\gamma} \Rightarrow \left(\frac{dp}{d(1/\rho)} \right)_{Isent.} = - \gamma \frac{p}{1/\rho}$$

$$\boxed{(\Delta w_T)_{adiab.} > (\Delta w_T)_{isoth.}}$$

- phénomènes dissipatifs (créateurs de chaleur) éloignent l'adiabatique de l'isotherme dans le cas d'une compression et à la rapprocher dans le cas d'une détente. Outre leur effet néfaste qui est la **dégradation d'énergie mécanique**, ils ont donc un "**effet thermodynamique**" encore négatif dans le cas d'une compression, mais favorable dans le cas d'une détente.
- Le rendement **polytropique**, du fait de son caractère local, ne caractérise que l'effet purement dissipatif : c'est un rendement **aérodynamique**.
- Le rendement **isentropique**, du fait de son caractère global, englobe à la fois l'effet **dissipatif** et l'effet **thermodynamique** qui en résulte.

3^{ème} partie - Analyse de l'écoulement dans le plan circonférentiel

- ❖ Introduction
- ❖ Analyse thermodynamique monodimensionnelle
- ❖ **Analyse de l'écoulement dans le plan circonférentiel**
 - Notion de triangle de vitesse
 - Équation d'Euler
 - Écoulement en grille d'aubes de compresseur
- ❖ Équation de l'équilibre radial simplifié
- ❖ Cas d'application : dessin d'un étage de compresseur axial

Notion de triangle de vitesse

- A partir de la relation :

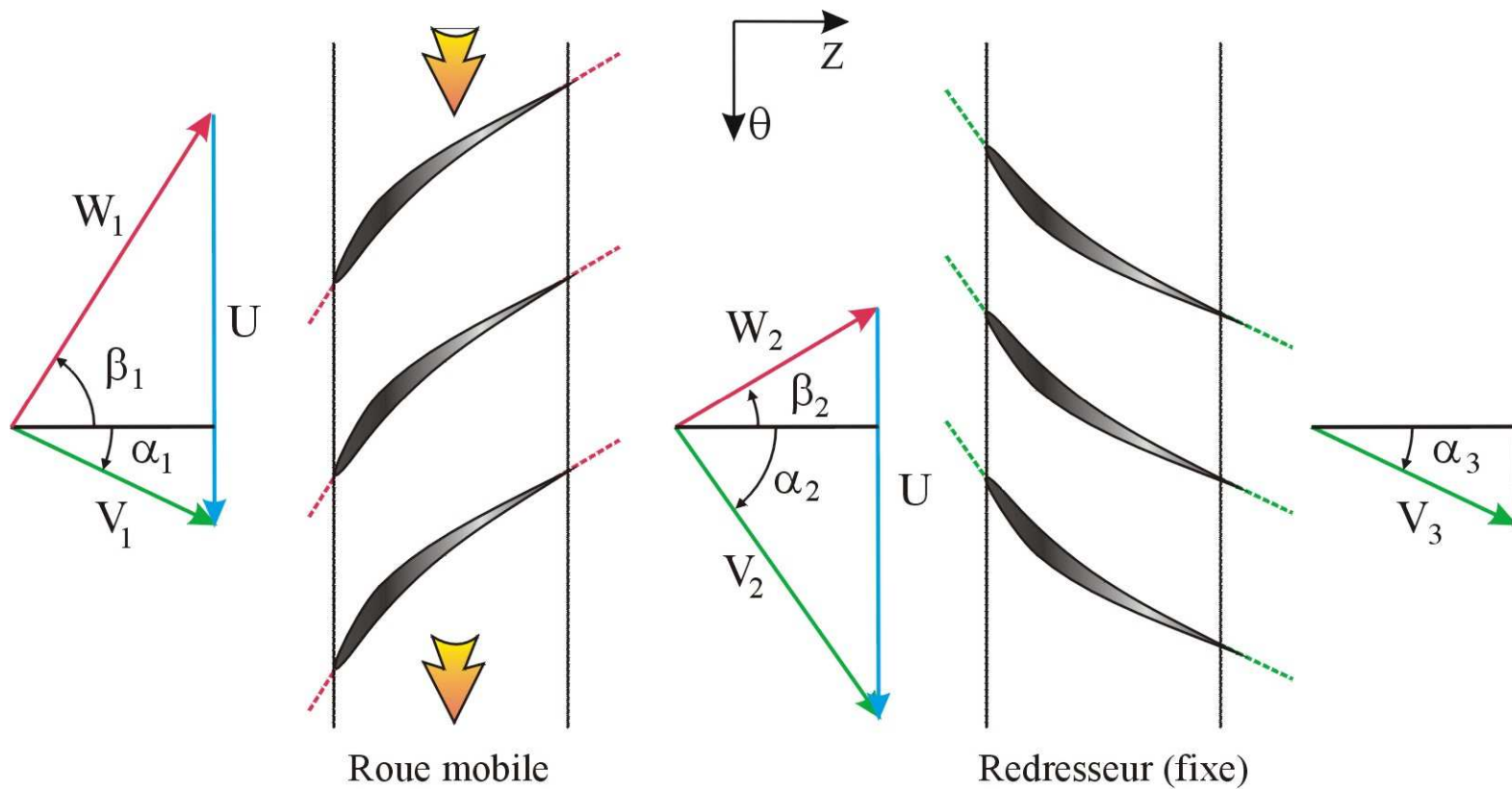
$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{W} + \vec{U}$$

- Représentation dans le plan aube-à-aube qui permet de visualiser rapidement le module et la direction du vecteur vitesse en amont et en aval :
 - d'une **roue fixe** (repère absolu – vitesse et angle absolus V et α)
 - d'une **roue mobile** (repère relatif – vitesse et angle relatifs W et β)
- Outil pratique pour prévoir le fonctionnement d'une roue et estimer :
 - la charge aérodynamique sur l'aubage
 - angle d'incidence au bord d'attaque
 - déflexion imposée à l'écoulement
 - donc force d'aubage (id travail échangé si la roue est mobile)
 - fonctionnement hors adaptation (possibilité de décollement)
 - influence d'une variation de rayon, des couches limites pariétales
 - niveau d'accélération ou de décélération dans la roue,...

❖ Cas compresseur

cas simple :

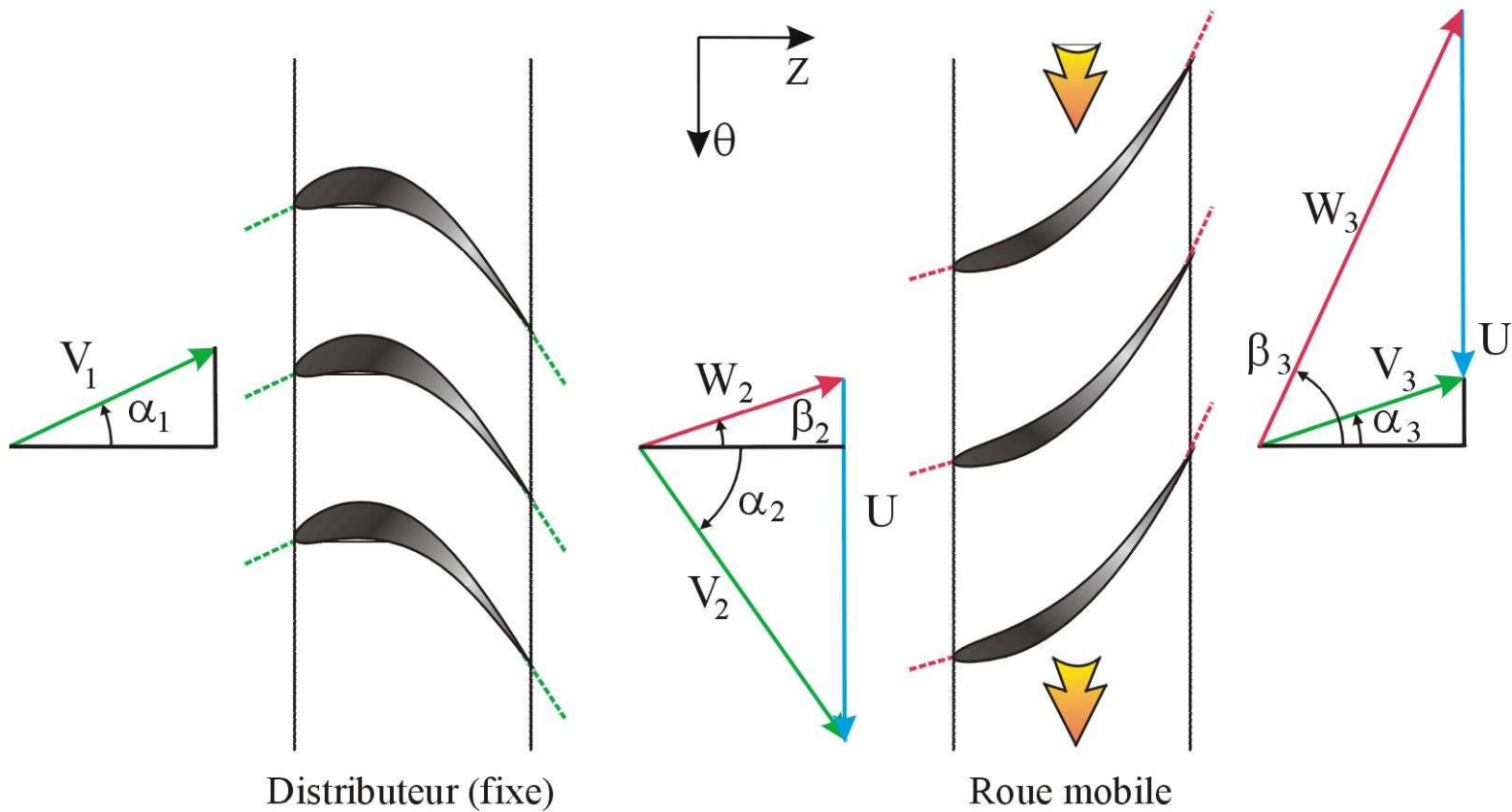
- machine axiale (pas de variation de rayon et plan aube-à-aube = cylindre),
- pas de variation de vitesse axiale



❖ Cas turbine

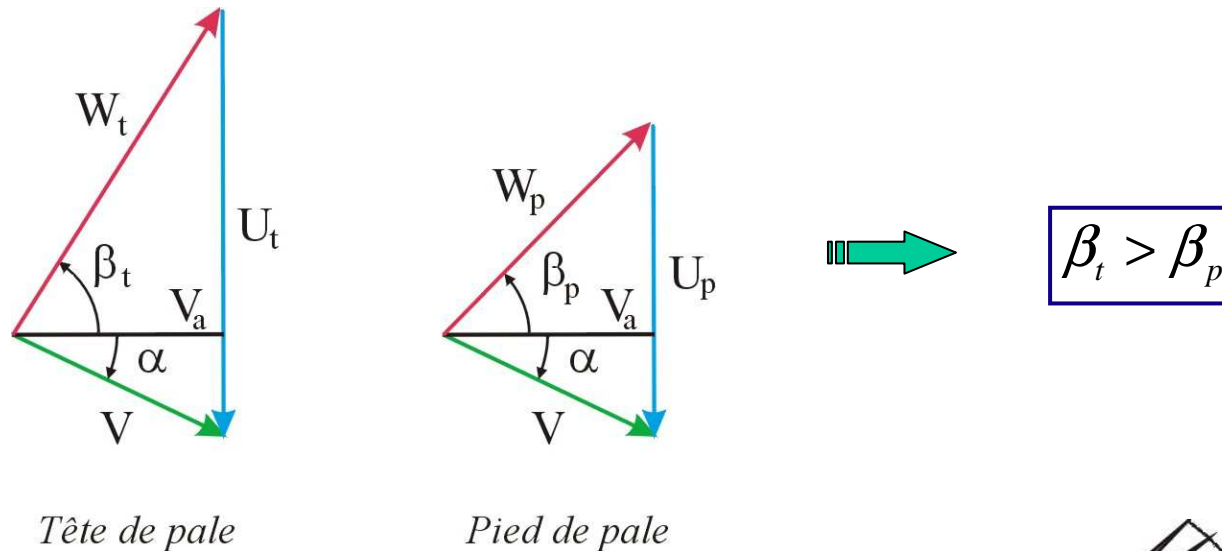
cas simple :

- machine axiale (pas de variation de rayon et plan aube-à-aube = cylindre),
- pas de variation de vitesse axiale

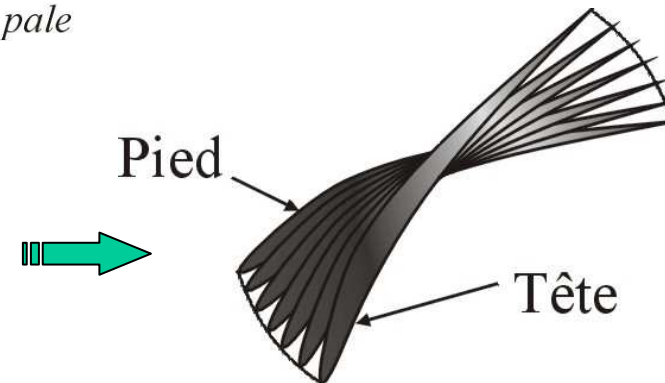


❖ Vrillage des pales le long de l'envergure (compresseur)

- En amont d'un rotor, une augmentation de R (du moyeu au carter) modifie la valeur de $U (= \omega.R)$, et donc les triangles de vitesse.

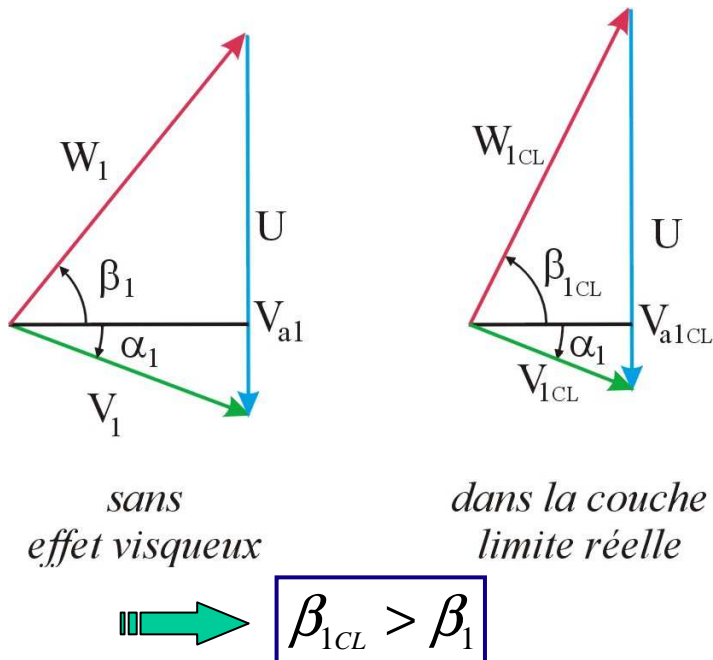
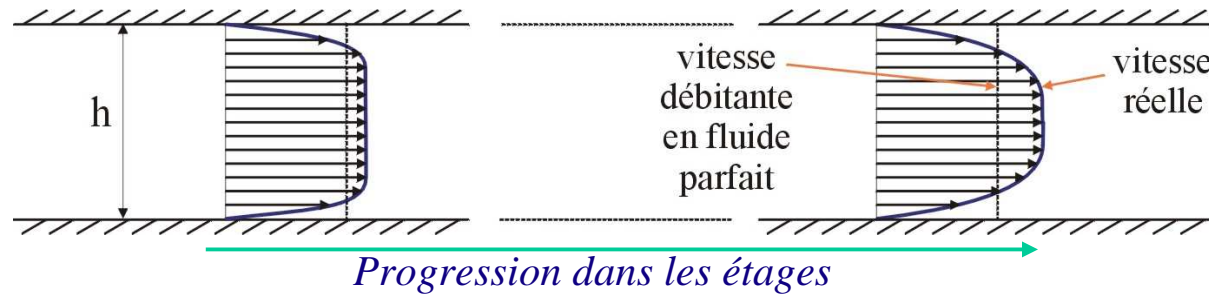


- Pour que l'incidence sur l'aubage soit bien adaptée sur toute son envergure, il faut modifier l'angle de calage des aubages en fonction du rayon, d'où leur forme vrillée.



❖ Influence des zones visqueuse pariétales (compresseur)

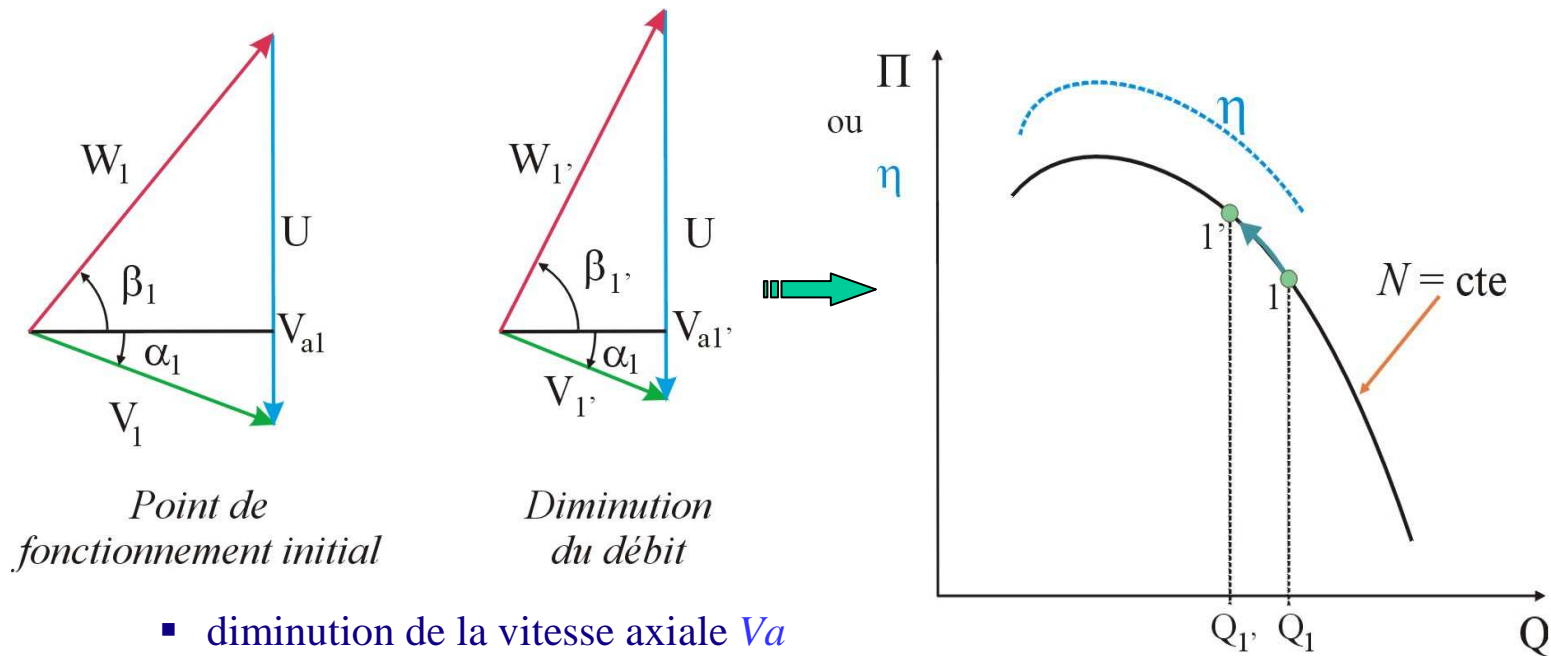
- Après plusieurs étages, le profil de vitesse de l'écoulement dans le plan méridien met en évidence la diminution de la vitesse débitante V_a près des parois.



- Dans les CL, l'angle d'incidence est donc plus élevé => augmentation du travail (cf Euler).
- Mais : surcharge + phénomènes visqueux + jeu en bout d'aubage (éventuellement) => pertes également plus importantes.
- Problème critique** : lorsque la roue est déjà très chargée, cette surcharge peut amener à des décollements des CL d'aubages => chute brutale des performances dans ces zones (pouvant affecter l'ensemble de la roue)

❖ Allure des courbes caractéristiques d'un compresseur

- Diminution du débit à vitesse de rotation constante :



- diminution de la vitesse axiale V_a
- donc augmentation du travail fourni

➡ **Augmentation du taux de pression** (dans un premier temps)

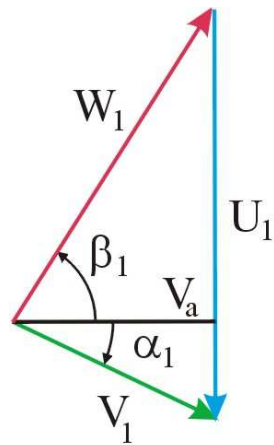
- **Si diminution trop importante du débit :**

- décollement des couches limites d'aubages (augmentation des pertes)
- donc chute du rendement
- déflexion ne se faisant plus correctement => diminution du travail

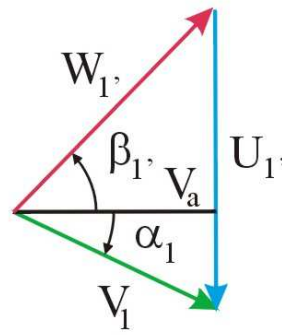
➡ **Chute importante du taux de pression**

❖ Allure des courbes caractéristiques d'un compresseur (suite)

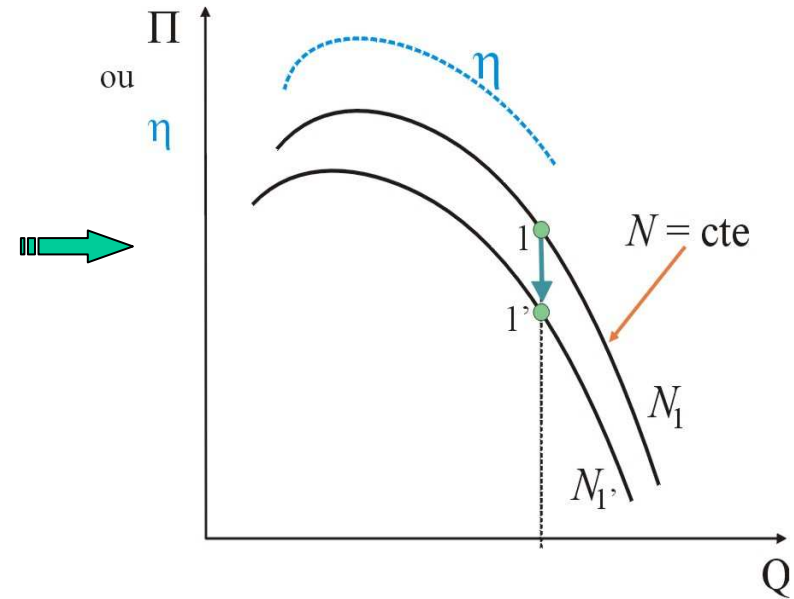
- Diminution de la vitesse de rotation à débit constant : ($V_a = \text{cte}$)



Vitesse de rot. I



Vitesse de rot. I'



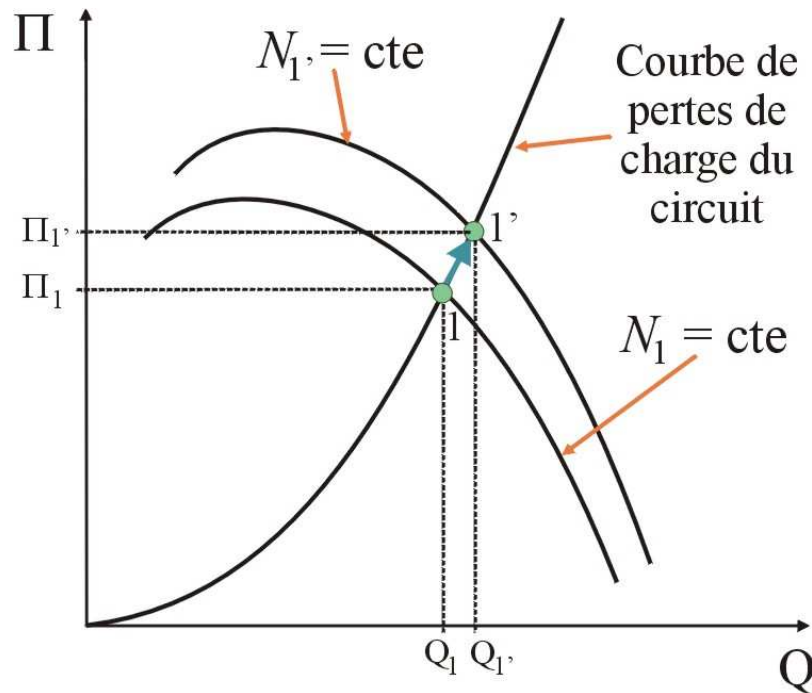
- diminution de la vitesse d'entraînement U
- Ainsi, diminution de l'angle d'incidence β_1
- donc diminution du travail fourni



diminution du taux de pression

❖ Adaptation du débit à la vitesse de rotation et à la caractéristique du circuit de charge (compresseur)

- Si on place un compresseur donné dans un circuit donné et que la vitesse de rotation N est fixée, le débit Q s'ajuste de lui-même (de même que pour une turbine donnée dans un circuit donné et disposant d'un certain taux de détente, la vitesse de rotation s'ajuste d'elle même).
- Pourquoi ?

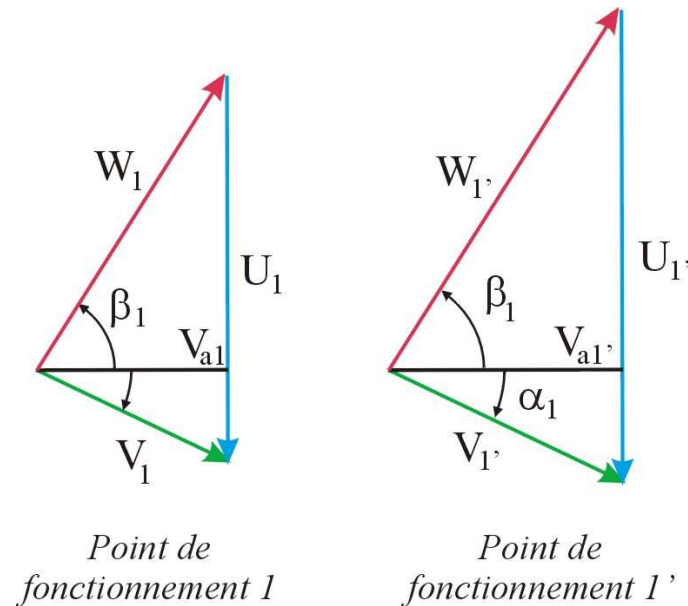


■ *Point de fonctionnement 1 :*
 intersection de la **courbe caractéristique** du compresseur à $N_1 = \text{cte}$ et de la **courbe de pertes de charge** du circuit aéroulque.

(la pression délivrée par la machine ne sert qu'à vaincre les pertes de charges comprises entre les deux infinis amont et aval)

- Si augmentation brutale de la vitesse de rotation de N_1 à $N_{1'}$, \Rightarrow augmentation de l'angle $\beta_1 \Rightarrow$ augmentation du travail \Rightarrow augmentation du taux de pression (la machine peut donc s'opposer à des pertes de charges dans le circuit plus importantes que précédemment)

- De ce fait, le débit va augmenter jusqu'à ce que le niveau de pertes revienne équilibrer le taux de pression délivré. Ceci s'accompagne d'une augmentation de V_a qui restitue l'allure du triangle de vitesse comparable à la précédente (triangles homothétiques).



- Pour passer du point de fonctionnement 1 (Π_1, Q_1) à un autre point de fonctionnement 1' ($\Pi_{1'}, Q_{1'}$), il y a adaptation du triangle de vitesse.
- Ce type d'adaptation se réalise lors de la **montée en vitesse** de la machine (qui amène le débit de 0 à Q).

Équation d'Euler

- L'équation d'Euler relie la quantité d'énergie échangée entre le fluide et les aubages de la machine, aux caractéristiques aérodynamiques de l'écoulement en amont et en aval de la roue.
- Cette équation est établie à partir de la projection sur l'axe de la machine de l'équation intégrale du moment de quantité de mouvement, qui permet d'introduire et d'explicitier le couple exercé sur l'arbre par le fluide, ou inversement.

❖ Détermination de l'équation d'Euler

- Forme intégrale de l'équation du moment de quantité de mouvement :

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_D (\vec{r} \wedge \rho \vec{V}) d\vartheta = \int_{\partial D} (\vec{r} \wedge \rho \vec{V})(\vec{U} - \vec{V}) \cdot \vec{n} dS + \int_{\partial D} \vec{r} \wedge \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS - \int_{\partial D} p \vec{r} \wedge \vec{n} dS + \int_D (\vec{r} \wedge \rho \vec{f}) d\vartheta \quad (1)$$

- Couple exercé sur l'arbre par le fluide :
 - En projetant (1) dans la direction de l'axe machine, et en considérant le terme de pesanteur comme globalement nul, on obtient le moment axial des forces (de pression et de viscosité) exercées par les parois (fixes ou mobiles) sur le fluide.

$$M_a = \frac{\delta}{\delta t} \int_D R V_\theta dm + \int_{\partial D_1 \cup \partial D_2} R V_\theta dm_s - \int_{\partial D_1 \cup \partial D_2} R (\vec{\tau} \cdot \vec{n})_\theta dS$$

- Application à un tube de courant.

Hypothèses :

- sauf le cas (très particulier) d'un écoulement fortement cisailé, le terme provenant des tensions visqueuses au sein du fluide est négligeable sur ∂D_1 et ∂D_2 .
- le domaine d'intégration se limite à un tube de courant compris entre R et $R+dR$: sur ∂D_1 et ∂D_2 les valeurs de R et V_θ (considérée comme moyennée dans la direction θ) pourront donc être considérées comme constantes dans le plan méridien.
- le moment cinétique contenu dans D est supposé constant avec le temps
=> les dérivées temporelles dans le repère lié à D sont nulles.
- la conservation de la masse impose que le débit sortant de ∂D_2 (dm_{s2}) soit égal au débit entrant dans ∂D_1 ($-dm_{s1}$).

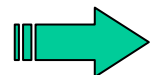
Le moment axial élémentaire est alors :

$$dM_a = (R_2 V_{\theta 2} - R_1 V_{\theta 1}) dm_s$$

d'où puissance échangée avec la machine : $dP = \vec{\omega} \cdot d\vec{M}_a = (U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}) dm_s$

L'énergie apportée au fluide par unité de masse est : $\Delta W_T = \frac{dP}{dm_s} = U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}$

Dans le cas d'un écoulement adiabatique : $\Delta h_0 = \Delta W_T + \Delta q \equiv \Delta W_T$



$$\Delta h_0 = U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}$$

❖ Interprétation de l'équation d'Euler

- Rappel : $V_\theta = W_\theta + \omega.R$

L'équation d'Euler peut donc aussi s'écrire :

$$\Delta h_0 = (U_2 W_{\theta 2} - U_1 W_{\theta 1}) + (U_2^2 - U_1^2)$$

*Travail
aérodynamique*

*Travail des forces
de Coriolis*

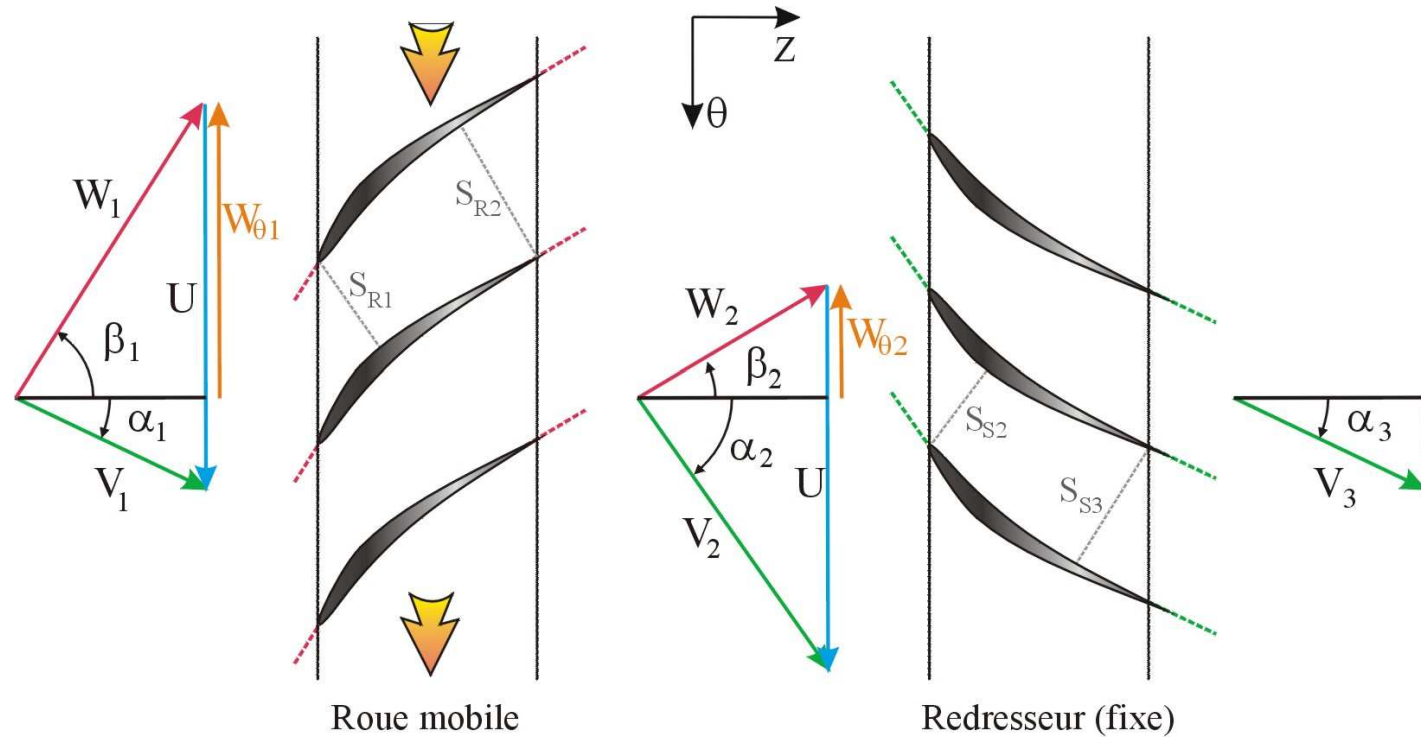
- Travail aérodynamique dans une machine axiale :
 - Lorsque les variations de rayon sont négligeables le long d'une ligne de courant, c'est le **seul travail existant**. On a alors :

$$\Delta h_0 = U (W_{\theta 2} - W_{\theta 1}) + O$$

$$\Delta h_0 = U \cdot V_a (\tan \beta_2 - \tan \beta_1) \quad (\text{Si } V_a \text{ est constant})$$

➡ Ce travail est lié à la **déflexion de l'écoulement** au passage de la roue mobile

• Cas d'un compresseur axial :



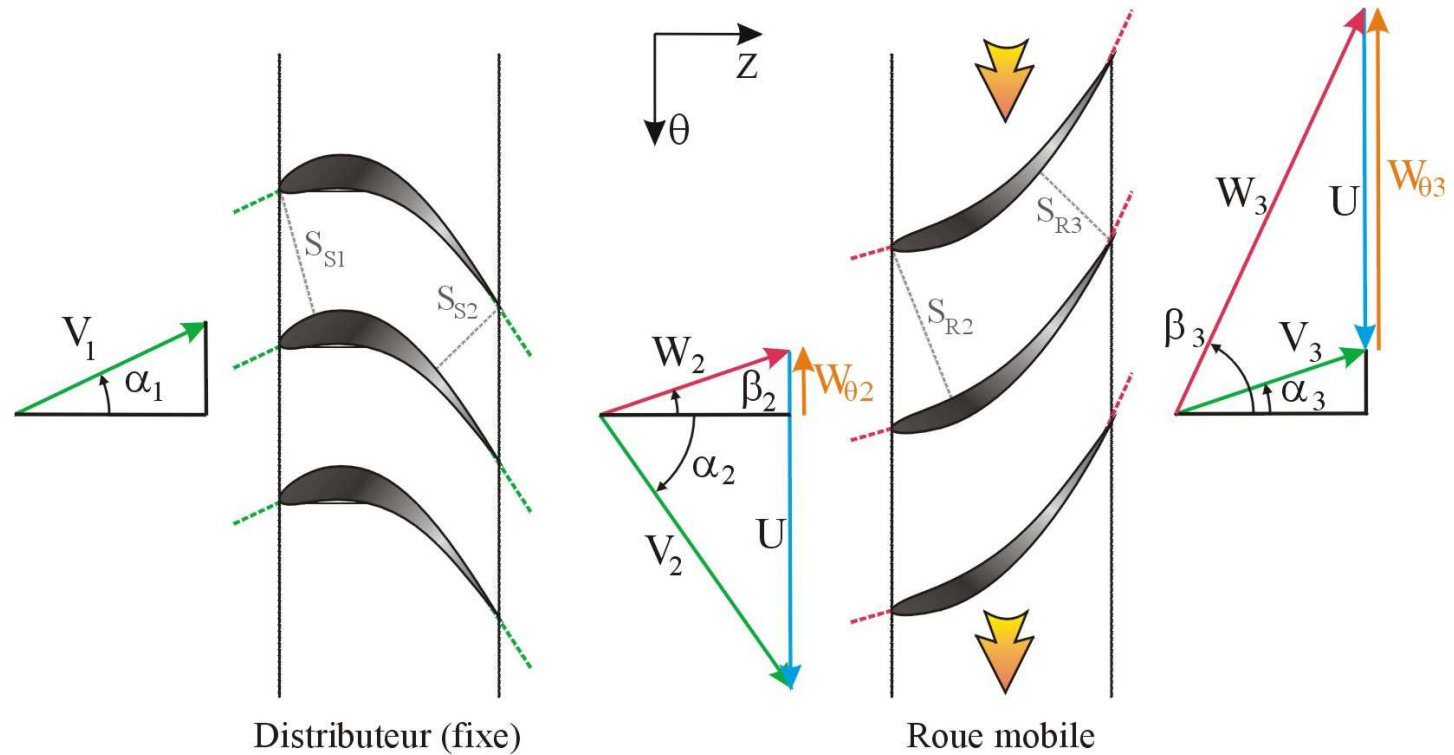
- Convention de signe :

$$V_{\theta 2} > 0, V_{\theta 1} > 0 \text{ et } V_{\theta 2} > V_{\theta 1} \Rightarrow V_{\theta 2} - V_{\theta 1} > 0 \quad (\text{augmentation de l'EC dans le rotor})$$

$$\text{ou } W_{\theta 2} < 0, W_{\theta 1} < 0 \Rightarrow W_{\theta 2} - W_{\theta 1} > 0 \quad \text{mais } |W_{\theta 2}| < |W_{\theta 1}| \quad (\text{décélération de l'écoulement relatif dans le rotor})$$

$$\text{donc : } \Delta h_0 > 0 \quad \text{cohérence avec la convention de signe thermodynamique.}$$

• Cas d'une turbine axiale :



- Convention de signe :

$$V_{\theta 2} > 0, V_{\theta 3} < 0 \text{ et } V_{\theta 3} < V_{\theta 2} \quad \Rightarrow \quad V_{\theta 3} - V_{\theta 2} < 0 \quad (V_3 < V_2 \Rightarrow \text{récupération de l'EC dans le rotor})$$

$$\text{ou } W_{\theta 2} < 0, W_{\theta 3} < 0 \quad \Rightarrow \quad W_{\theta 3} - W_{\theta 2} < 0 \quad \text{mais } |W_{\theta 2}| < |W_{\theta 3}| \quad (\text{accélération de l'écoulement relatif dans le rotor})$$

$$\text{donc : } \Delta h_0 < 0 \quad \text{cohérence avec la convention de signe thermodynamique.}$$

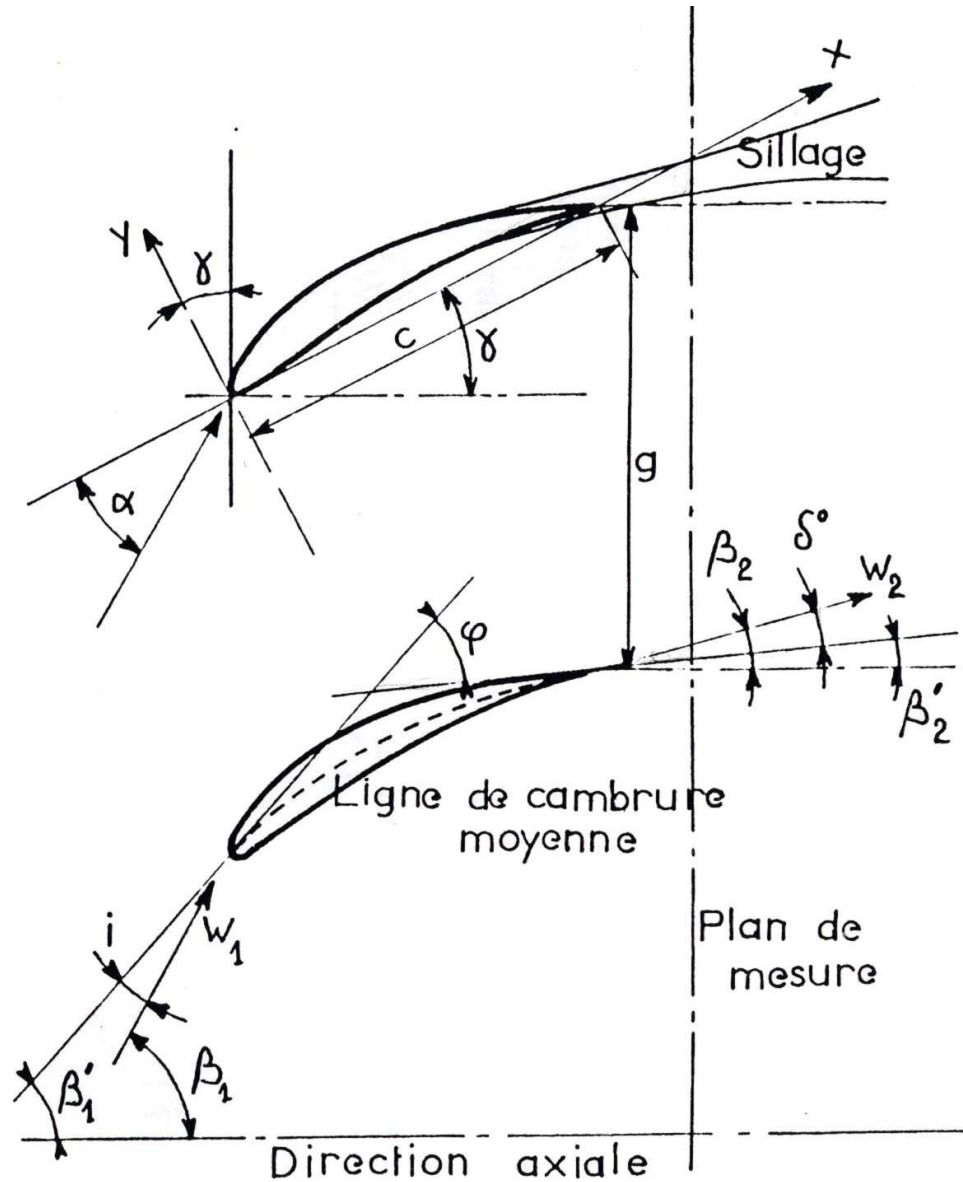
- Remarque sur le gradient de pression longitudinal :
 - **Compresseur** : écoulement décéléré (augmentation de la section de passage) :
Gradient de pression $\partial p / \partial s > 0$ défavorable pour les couches limites qui se développent sur les aubages \Rightarrow **déflexion de l'ordre de 40°**
 - **Turbine** : écoulement accéléré (diminution de la section de passage) :
Gradient de pression $\partial p / \partial s < 0$ favorable pour les couches limites qui se développent sur les aubages \Rightarrow **déflexion de l'ordre de 100°**
- Machine radiale ou mixte :
 - **Travail de la force de Coriolis** : on montre que le terme $U_2^2 - U_1^2$ représente le travail de la force de Coriolis $2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{W}$.
Ce travail n'est pas explicitement lié à la force d'aubage (déflexion de l'écoulement) et ne dépend donc pas du comportement des zones visqueuses se développant sur les aubages : Il ne dépend que de la variation de R et n'est donc **pas limité**.
Attention au rôle défavorable de la force de Coriolis sur la nature de la turbulence.
 - **Travail de la force centrifuge** : les forces centrifuges $-\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$ travaillent lors d'un changement de rayon dans le repère relatif. Leur travail se traduit par une variation de la pression statique (transfert d'énergie ne s'effectuant pas par l'intermédiaire des aubages et se faisant sans pertes).
Ce travail n'est pas comptabilisé dans l'équation d'Euler, car dans le repère absolu les forces passant par l'axe ne travaillent pas.

Écoulement en grille d'aubes de compresseur axial

- Une fois déterminée la **déflexion** ($\beta_2 - \beta_1$) correspondant au travail désiré, il reste à :
 - **dessiner** les aubages qui permettent cette déflexion avec le minimum de pertes,
 - déterminer le **nombre** et la **position** de ces aubages dans la roue.
- Problème complexe (3D et visqueux) => utilité de **données empiriques** provenant de mesures sur des structures plus simples : les **grilles d'aubes** fixes.
- Les informations obtenues sont intéressantes sur 4 points :
 - prévision du **travail maximum** admissible par les aubages (cf critères de charges)
 - estimation de la **dévi**ation de l'écoulement par rapport à la direction du bord de fuite des aubages
 - estimation des **pertes de pression** d'arrêt au passage de la roue
 - Détermination de **l'angle d'incidence optimum** (correspondant aux pertes minima)
- Informations utiles dans la phase de dimensionnement (ceci n'exclue pas des calculs ultérieurs plus sophistiqués), mais transposables qu'à des machines axiales.

Analyse de l'écoulement dans le plan circonférentiel

❖ Définition des paramètres géométriques



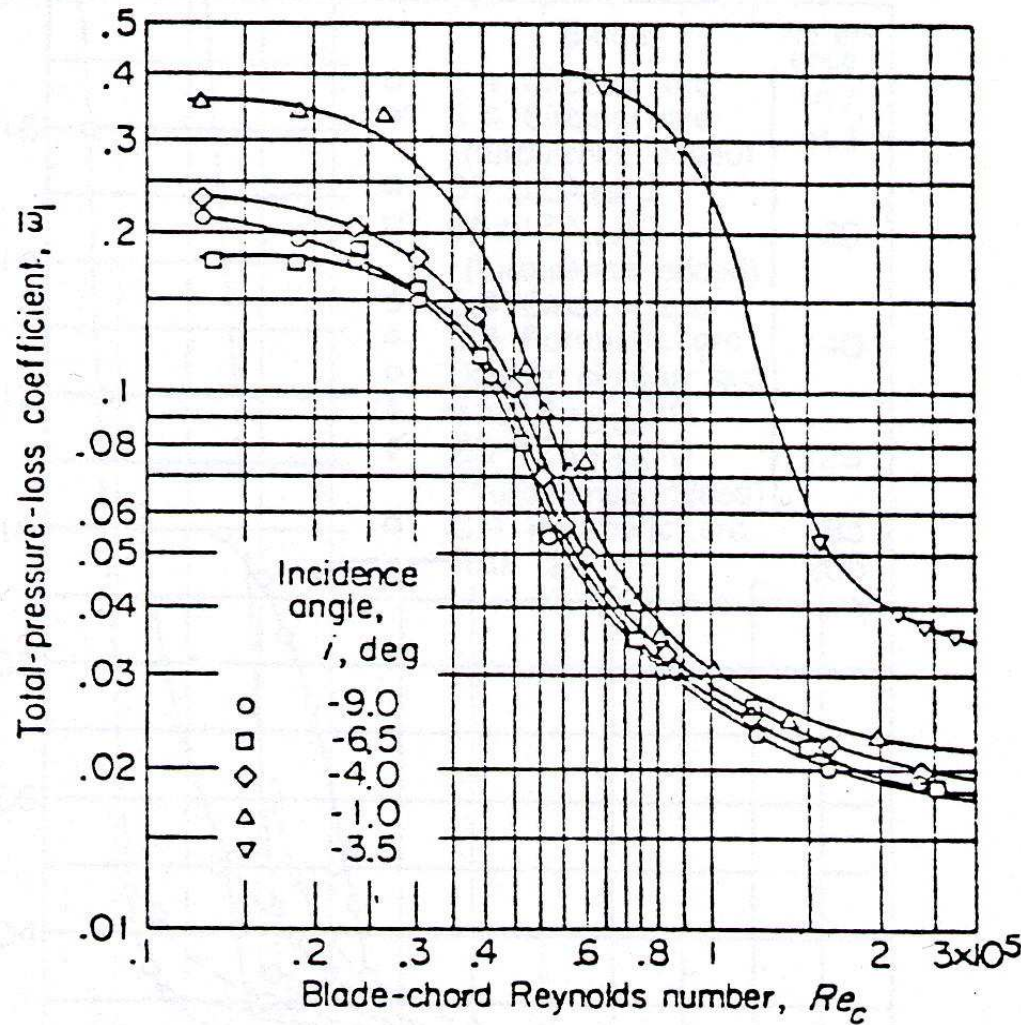
- c : corde
- i : angle d'incidence
- g : pas
- θ : déflexion
- γ : angle de calage
- δ : angle de déviation
- σ : solidité = c/g
- φ : cambrure

❖ Principaux paramètres influant sur les performances de la grille

- La nature du **profile** utilisé (cambrure, répartition d'épaisseur, état de surface)
- L'angle d'incidence lié à β_1 et au calage γ
- Le **calage** γ : une augmentation de γ :
 - décroît le guidage car le recouvrement est moindre
 - augmente β_1 à incidence équivalente donc donne plus de travail pour la même déflexion θ
(Pour $\theta = 10^\circ$, quand on passe de $\beta_1 = 30^\circ$ à $\beta_1 = 75^\circ$, la portance est multiplié par 8)
- La **solidité** $\sigma (=c/g)$: une augmentation de σ induit :
 - un meilleur guidage de l'écoulement
 - Un niveau de pertes par aubages inférieur du fait de la plus faible circulation par aubage (pic de vitesse inférieure)
 - **mais** : un plus grand nombre d'aubages : d'où un risque de **blocage** et un niveau de pertes total qui peut être supérieur.
- Le **nombre de Reynolds** basé sur la corde (qui doit être $> 2.5 \cdot 10^5$)
- Le niveau de **turbulence** dans l'écoulement extérieur.
- Le **nombre de Mach** (attention à la formation de poche supersonique).

[back](#)

Analyse de l'écoulement dans le plan circonférentiel



Nombre de Reynolds basée sur la corde et la vitesse relative en amont de l'aubage doit être supérieur à $2,5 \cdot 10^5$:

$$Re_c = \frac{W \cdot c}{\nu} \geq 2,5 \cdot 10^5$$

Pour des valeurs élevées de ce nombre de Reynolds, les couches limites sont principalement en régime turbulent, et les pertes sont nettement plus faibles.

❖ Pertes de pression d'arrêt

- Ces pertes sont dues :
 - aux couches limites se développant sur les aubages
 - aux mélange du sillage en aval
 - éventuellement aux ondes de choc (dans les cas supersoniques)

- Pertes caractérisées par un coefficient de pertes défini par : $\bar{\omega} = \frac{\Delta P_{0R}}{1/2 \cdot \rho \cdot W_1^2}$

avec

$$\bar{\omega} = 2 \left(\frac{\theta^*}{c} \right)_2 \cdot \frac{\sigma}{\cos \beta_2} \cdot \left(\frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2} \right)^2 \cdot \left[\frac{\frac{2H_2}{3H_2 - 1}}{1 - \left(\frac{\theta^*}{c} \right)_2 \cdot \frac{\sigma H_2}{\cos \beta_2}} \right]^3$$

terme souvent voisin de l'unité

θ_2^* est l'épaisseur de quantité de mouvement du sillage

H_2 est le facteur de forme en 2 : $H = \delta^*/\theta^*$ (très voisin de 1.1)

- Pour calculer les pertes, il faut (si l'on ne dispose pas de calcul de couche limite) estimer θ_2^*/c dans le sillages. Pour cela il existe plusieurs corrélations avec le niveau de décélération sur l'aubage.

❖ Critères de charges pour les compresseurs

Nécessité au moment du **dessin** d'un critère qui permette de savoir si la CL d'aubage va ou non supporter le gradient de pression adverse (si le niveau de travail désiré va pouvoir se faire avec un **niveau de pertes acceptable**).

Critère facilement utilisable s'il ne prend en compte que des paramètres aérodynamiques **d'entrée** et de **sortie** de la roue.

- Critère de De Haller :

$$\frac{W_2}{W_1} \geq 0.72$$

➡ Valeur faible par rapport à celle obtenue avec un diffuseur 2D ou axisymétrique, car :

- effets 3D dus aux CL de paroi qui introduisent un blocage
- le gradient réel W_2/W_{max} est local et est inférieur à W_2/W_1

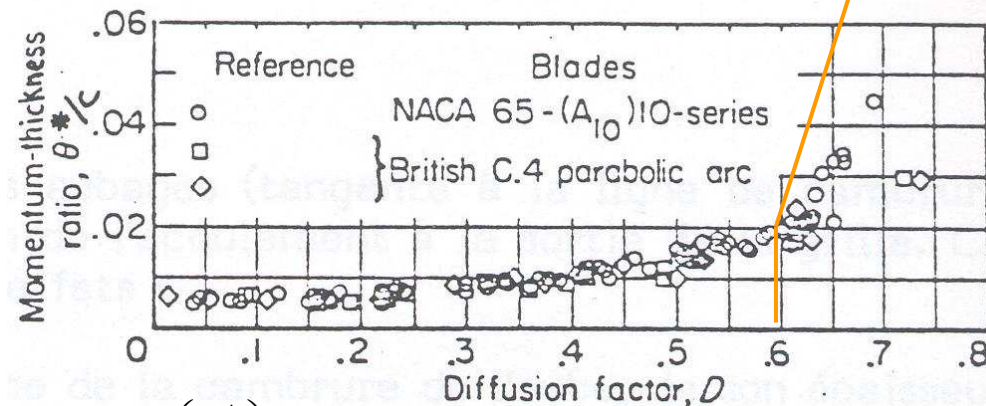
• Facteur de diffusion :

- Il vient d'une forme du **critère de Buri** qui est un critère local de décollement de couches limites turbulentes, incompressibles et bidimensionnelles, représentant la tendance à **l'accroissement rapide** de la couche limite au voisinage du **décollement**.
- Ce facteur a été explicité sous une forme **entrée-sortie** par **Lieblein**

Hypothèses : grille d'aubes NACA 65 d'épaisseur maximum 10%, mais efficacité satisfaisante de ce facteur sur d'autres aubes.

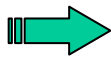
$$\Rightarrow D = 1 - \frac{W_2}{W_1} + \frac{|W_{\theta 2} - W_{\theta 1}|}{2 \cdot \sigma \cdot W_1} \leq 0.6$$

- Relation entre le facteur de diffusion et l'épaisseur de quantité de mouvement des CL



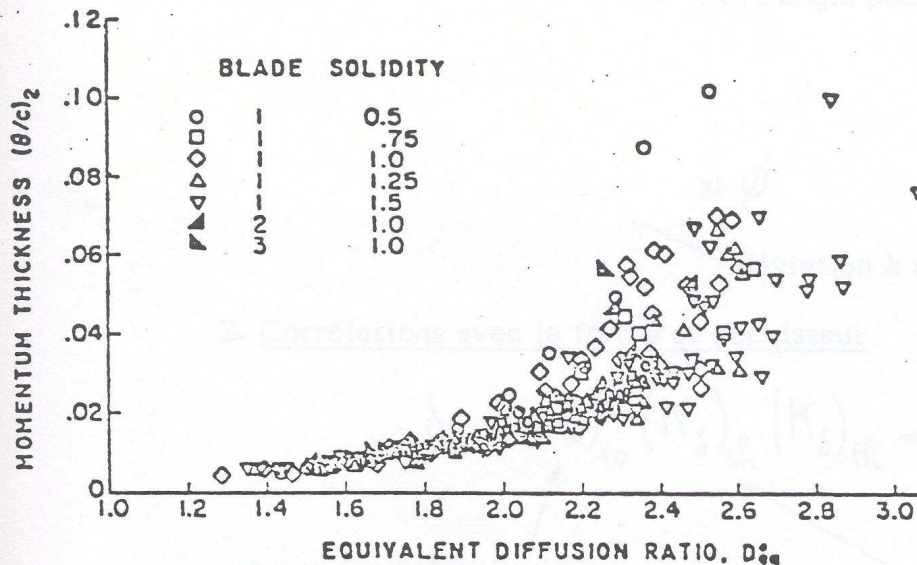
$$\left(\frac{\theta^*}{c} \right) \approx 0.0804 \cdot D^2 - 0.0272 \cdot D + 0.0071$$

- Facteur de diffusion équivalent :
 - Le facteur de diffusion cité précédemment ne s'applique qu'au **point de fonctionnement nominal**, d'où la nécessité d'un autre critère pour le fonctionnement hors adaptation. C'est le facteur de diffusion équivalent :



$$D_{eq} = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} \cdot \left[1.12 + a \cdot |i - i^*|^{1.43} + 0.61 \frac{\cos^2 \beta_1}{\sigma} \cdot |\tan \beta_2 - \tan \beta_1| \right] \leq 2.0$$

- $a = 0.0117$ pour les aubages de la série NACA 65 A10
- $a = 0.007$ pour les aubages de la série C4
- i^* est l'angle d'incidence optimum
- i est l'angle d'incidence réel



4^{ème} partie - Équation de l'équilibre radial simplifié

Équation de l'équilibre radial simplifié

- ❖ Introduction
- ❖ Analyse thermodynamique monodimensionnelle
- ❖ Analyse de l'écoulement dans le plan circonférentiel
- ❖ **Équation de l'équilibre radial simplifié**
 - Équation fondamentale de la dynamique et hypothèses
 - Exemple de quelques distributions radiales
- ❖ Cas d'application : dessin d'un étage de compresseur axial

Équation fondamentale de la dynamique et hypothèses

❖ Equation fondamentale

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}) \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{\sigma}} = \left(\overline{\overline{\tau}} - p\overline{\overline{I}} \right)$$

effets de pression
effets visqueux
tenseur des contraintes

❖ Hypothèses

1. écoulement permanent
2. équation valable hors zone aubée
3. surfaces de courant cylindriques (machine axiale)
4. écoulement axisymétrique $\rightarrow A_\theta = \overline{A_\theta}$
5. tension de contrainte visqueuses τ_{ij} négligeables
6. Forces volumiques négligeables

$$\overset{1}{\cancel{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \vec{V} = \overset{6}{\cancel{\vec{f}}} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\overset{5}{\cancel{\overline{\overline{\sigma}}}}) - \frac{1}{\rho} \cdot \operatorname{grad}(p)$$

❖ Repère cylindrique

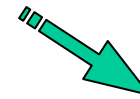
$$0 + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_R}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V_R}{\partial \theta} - V_\theta \right) & \frac{\partial V_R}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - V_R \right) & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_R \\ V_\theta \\ V_z \end{bmatrix} = 0 + 0 - \frac{1}{\rho} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}$$

❖ Projection sur la direction radiale

$$\overset{3}{\cancel{\frac{\partial V_R}{\partial R} \cdot V_R}} + \frac{1}{R} \left(\overset{4}{\cancel{\frac{\partial V_R}{\partial \theta}} - V_\theta \right) \cdot V_\theta + \overset{3}{\cancel{\frac{\partial V_R}{\partial z} \cdot V_z}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial R}$$

3 : surface de courant cylindrique $V_R=0$

4 : écoulement axisymétrique : $V_R(\theta)=cte$



$$\boxed{-\frac{V_\theta^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial R}}$$

❖ Équation de l'équilibre radiale simplifiée

$$dh - \frac{1}{\rho} dp = T ds \quad (\text{Équation de Gibbs})$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} = T \frac{\partial s}{\partial R} - \frac{\partial h}{\partial R} = T \frac{\partial s}{\partial R} - \frac{\partial h_0}{\partial R} + \frac{\partial V^2/2}{\partial R} = T \frac{\partial s}{\partial R} - \frac{\partial h_0}{\partial R} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R} (V_\theta^2 + V_z^2)$$

$$= T \frac{\partial s}{\partial R} - \frac{\partial h_0}{\partial R} + V_\theta \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + V_z \cdot \frac{\partial V_z}{\partial R}$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{V_\theta^2}{R} = T \frac{\partial s}{\partial R} - \frac{\partial h_0}{\partial R} + V_\theta \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + V_z \cdot \frac{\partial V_z}{\partial R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_\theta}{R} \cdot V_\theta \cdot \frac{\partial R}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \cdot R \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + V_z \cdot \frac{\partial V_z}{\partial R} = \frac{\partial h_0}{\partial R} - T \frac{\partial s}{\partial R}$$

$$\frac{V_\theta}{R} \cdot \frac{\partial R V_\theta}{\partial R} + V_z \cdot \frac{\partial V_z}{\partial R} = \frac{\partial h_0}{\partial R} - T \frac{\partial s}{\partial R}$$

E.R.S.

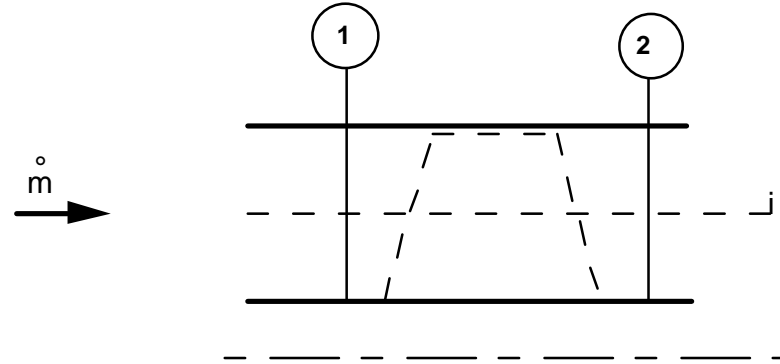
$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial (R V_\theta)^2}{\partial R} + \frac{\partial V_z^2}{\partial R} = 2 \cdot \frac{\partial h_0}{\partial R}$$

Négligeable si pas de gradient d'entropie selon R.

❖ Bilan équations / inconnues

- Considérons l'écoulement au passage d'une roue. Si nous faisons les bilans du nombre d'inconnues du problème et du nombre d'équations disponibles, nous avons :
 - 6 inconnues :
 - les répartitions radiales de h_0 , V_z et V_θ dans une section à l'amont de la roue
 - les répartitions radiales de h_0 , V_z et V_θ dans une section à l'aval de la roue
 - 3 équations :
 - l'équation d'équilibre radial simplifiée dans la section à l'amont de la roue
 - l'équation d'équilibre radial simplifiée dans la section à l'aval de la roue
 - l'équation d'Euler pour chaque rayon au passage de la roue
- Il y a donc la possibilité de choisir librement 3 répartitions.

Quelques lois d'évolutions classiques



❖ Le tourbillon libre

$$RV_{\theta} = Cte$$

- Conditions amont $h_{01} = Cte$ et $R_1 V_{\theta 1} = Cte$
- Tourbillon libre à l'aval $R_2 V_{\theta 2} = Cte = k$

$\Rightarrow h_{02}$, V_{z1} et V_{z2} constants.

❖ **Le tourbillon forcé**

$$V_{\theta} = k R$$

$$\Rightarrow V_z^2 = V_{zi}^2 + 2 \cdot k \cdot (\omega - k) (R^2 - R_i^2)$$

V_{zi} est calculé pour satisfaire la conservation du débit global.

❖ **L'angle absolu constant**

$$\alpha = Cte \quad (\tan \alpha = V_{\theta} / V_z)$$

$$\Rightarrow V_z = V_{zi} \cdot \left[\frac{R_i}{R} \right]^{\sin^2 \alpha}$$

❖ Quelques autres lois classiques

- Le vortex général

$$V_{\theta} = k_1 R^n \pm \frac{k_2}{R}$$

- L'étage exponentiel

$$V_{\theta} = k_1 \pm \frac{k_2}{R}$$

- Le degré de réaction constant

$$\Lambda = Cte$$

Téléchargement du cours sur :