

Turbomachines
Recueil d'exercices: corrigé

F. Ravelet^a

^a *Arts et Metiers ParisTech, DynFluid,*
151 boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris, France.
contact: florent.ravelet@ensam.eu

October 16, 2017

1 Turbomachines à fluide incompressible — Cavitation

1.1 Analyse du fonctionnement d'une pompe centrifuge

Question 1:

On relève sur les courbes caractéristiques du constructeur les paramètres de fonctionnement:

- Débit nominal, confondu par hypothèse avec le débit d'adaptation: $Q_{v,a} = 590 \text{ m}^3/\text{h}$
- Hauteur manométrique nominale: $H_n = 49 \text{ m.c.e}$
- Rendement global au nominal: $\eta_g = 81\%$
- Puissance mécanique au nominal: $\mathcal{P} = 98 \text{ kW}$
- Vitesse de rotation: $N = 1470 \text{ rpm}$

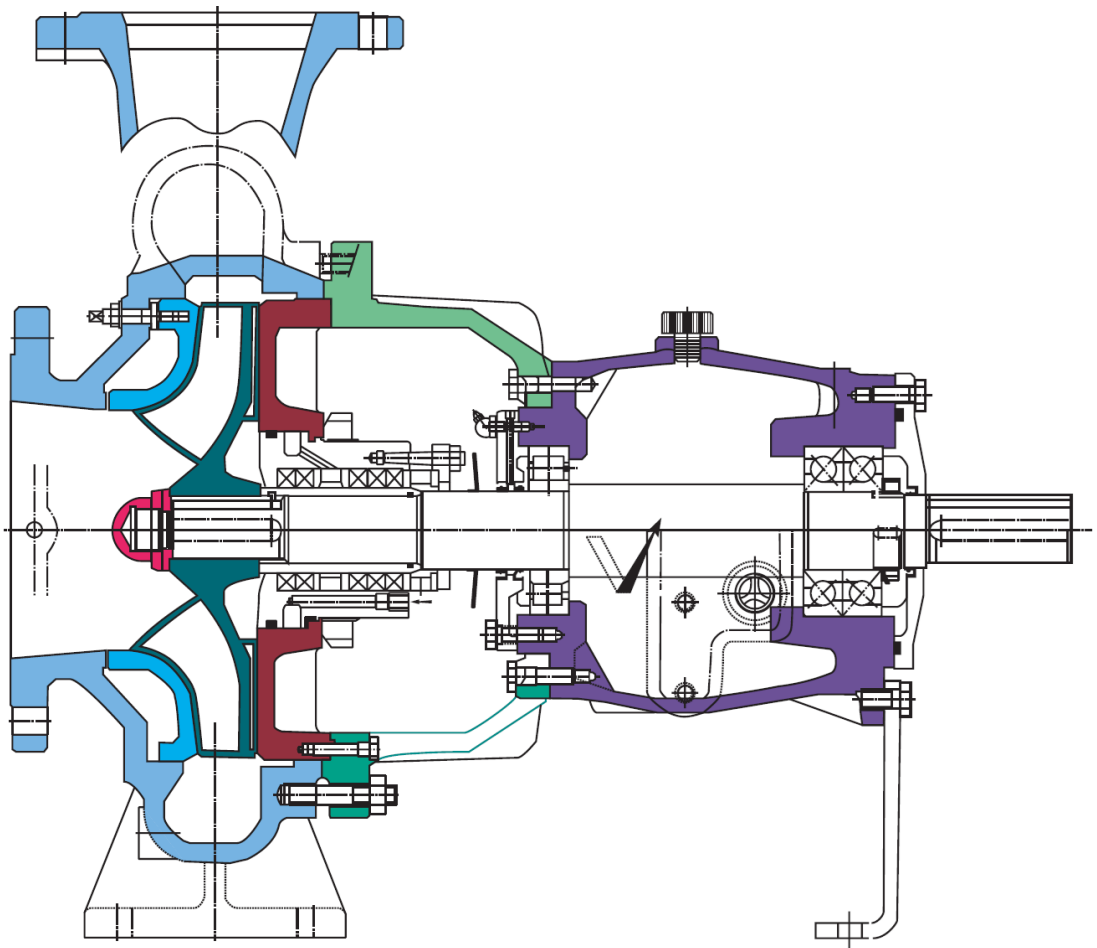


Figure 1 – Pompe centrifuge monocellulaire. Visualisez l'axe de rotation, la bride d'aspiration (à gauche), la roue, la volute et la bride de refoulement (sur le dessus). Cela vous aidera à mieux "voir" le tracé hydraulique en vue méridienne

Sur la vue méridienne (voir Fig. 1 pour vous aider, et Fig. 2 pour le corrigé), on relève:

- Le rayon de la ligne moyenne à l'entrée $R_1 = 75.9 \text{ mm}$

- La hauteur d’aubage à l’entrée, qui est le diamètre du cercle “capable” $b_1 = 78.2$ mm
- Le rayon de la ligne moyenne à la sortie $R_2 = 204.6$ mm
- La hauteur d’aubage à la sortie, qui est le diamètre du cercle “capable” $b_2 = 41.4$ mm

Il est important de relever les rayons *sur la ligne moyenne* et les hauteurs d’aubage comme diamètre d’un cercle *centré sur la ligne moyenne et tangent aux lignes intérieures et extérieures*, car cela permet une bonne évaluation des surfaces débitantes. La surface débitante est en effet celle d’un tronc de cône en entrée, et celle d’un cylindre droit en sortie si celle-ci est purement centrifuge. Cela fonctionne aussi pour les machines axiales où les surfaces sont des portions de disque. Avec R_m le rayon moyen et b la longueur perpendiculaire aux lignes de courant, on peut montrer que la surface débitante S est:

$$S = 2\pi R_m b$$

C’est un petit exercice de géométrie à faire. Cette “formule” est valable pour les surfaces d’entrée/sortie de machines axiales, mixtes (hélico-centrifuges) ou centrifuges, un cylindre droit étant au final une portion de disque qui dégénère en passant par un tronc de cône. On trouvera dans les différentes formules du cours ces groupement $2\pi Rb$: regardez bien, cela correspond à un calcul de surface débitante pour traduire le débit en une composante de vitesse.

Sur la vue de dessus (voir Fig. 2), on peut relever R_1 et R_2 , mais surtout:

- Le nombre d’aubages $Z = 5$
- l’angle de sortie d’aubage $\beta_{2,\infty} = 67.8 \pm 1.8^\circ$ (moyenne de trois mesures)

On déduit l’angle d’entrée d’aubage en exprimant la condition d’adaptation à l’entrée (voir le photocopié de cours et les triangles de vitesse qui y sont tracés):

$$\tan\beta_{1,0} = \frac{2\pi R_1^2 b_1 \omega}{Q_{v,a}}$$

On trouve $\beta_{1,0} = 69.4^\circ$

Question 2:

On calcule

$$\Omega = \frac{\omega Q_{v,a}^{1/2}}{(gH_n)^{3/4}} = 0.607$$

Sur le diagramme de Cordier, on relève $\Lambda = 2.326$: cela correspond au rayon spécifique d’une machine optimale d’après le diagramme de Cordier. Otto Cordier a compilé au début des années 1950 un grand nombre de caractéristiques de turbomachines de compression et a tracé le lieu des rendements maximum dans le plan $\Omega - \Lambda$.

La définition de Λ est :

$$\Lambda = \frac{Re (gH_n)^{1/4}}{Q_{v,a}^{1/2}}$$

On en déduit le rayon extérieur qu’aurait une machine de rendement optimal pour notre vitesse spécifique: $Re = 201.1$ mm. C’est très proche du rayon extérieur de notre machine, on

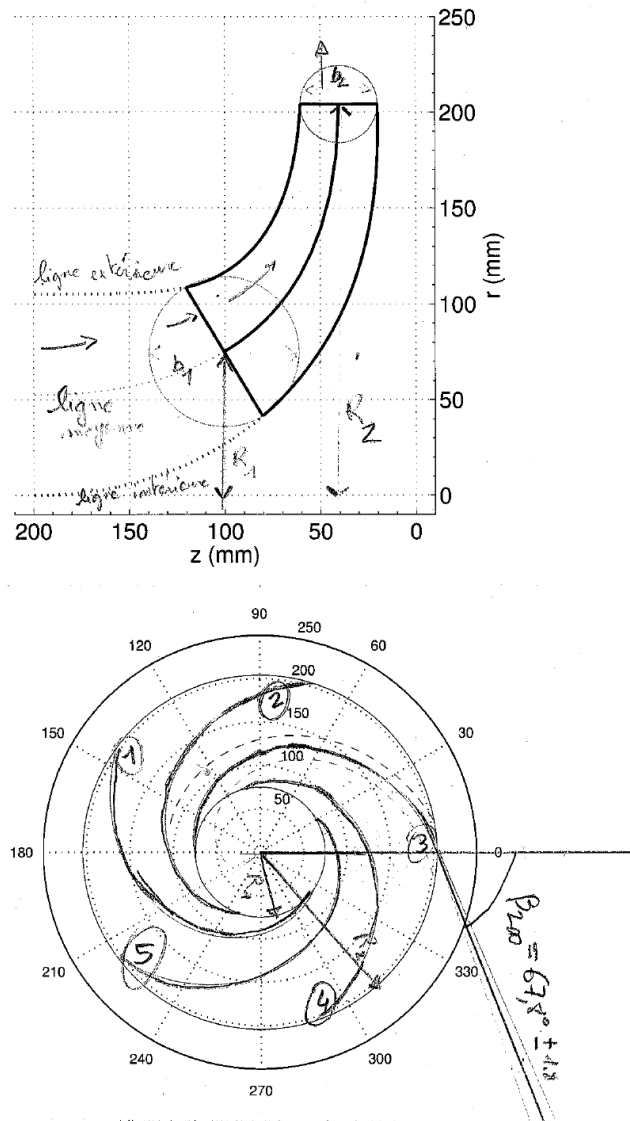


Figure 2 – Mesures effectuées sur les vues méridiennes et de dessus

peut donc en conclure que cette machine a sûrement été dessinée en utilisant le diagramme de Cordier.

Question 3:

On rappelle que, d'après le théorème d'Euler des turbomachines, en fluide parfait, la variation d'enthalpie massique totale h_0 (isentropique *i.e.* en fluide parfait) est:

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} h_{0,s} = (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1})$$

avec $U_2 = R_2 \omega$ la vitesse d'entraînement en sortie et $C_{\theta 2}$ la composante tangentielle (ou giratoire ou orthoradiale comme vous préférez) de la vitesse *absolue* en sortie; et les indices 1 pour les mêmes grandeurs en entrée de roue. Ce théorème est fondamental. Il fonctionne en machine de détente (on a un signe négatif car le fluide cède de l'énergie à l'arbre) ou de compression, en écoulement compressible ou incompressible.

Dans le cas du fluide en écoulement incompressible, avec masse volumique ρ constante

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} h_{0,s} = \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} P_{0,th}}{\rho} = gH_{th}$$

avec P_0 la pression *totale*.

Ce théorème se démontre en faisant un bilan de moment angulaire sur la ligne de courant moyenne et un bilan d'enthalpie. En notant \dot{m} le débit massique et T le couple sur l'arbre, on exprime le fait que la variation du moment cinétique est égal au couple:

$$T = \dot{m} (r_2 C_{\theta 2} - r_1 C_{\theta 1})$$

On multiplie par la vitesse angulaire et on a donc la puissance:

$$\mathcal{P} = \dot{m} \omega (r_2 C_{\theta 2} - r_1 C_{\theta 1}) = \dot{m} (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1})$$

Mais le bilan d'enthalpie donne:

$$\mathcal{P} = \dot{m} \Delta_{1 \rightarrow 2} h_{0,s}$$

D'où le résultat.

Dans notre cas, sans prérotation ($C_{\theta 1} = 0$), et en écrivant le triangle des vitesses en sortie, on a:

$$gH_{th} = U_2 (U_2 - C_{r2} \tan \beta_2)$$

Avec β_2 l'angle relatif du fluide en sortie. Or, on ne le connaît pas. On a en revanche un angle d'aubage $\beta_{2,\infty}$ en sortie, et, si le nombre d'aubages était infini, le fluide serait contraint à suivre la direction tangente aux aubages en sortie. Le nombre fini d'aubages laisse de la latitude au fluide pour sortir avec une direction moyenne différente. On modélise cet effet en calculant la hauteur théorique infinie $H_{th,\infty}$, *i.e.* ce que *serait* la hauteur manométrique en fluide parfait *si le fluide sortait avec un angle $\beta_{2,\infty}$* . Puis on applique un *coefficient de glissement* μ défini par:

$$H_{th} = \mu H_{th,\infty}$$

On trouvera diverses corrélations pour ce coefficient de glissement. La corrélation proposée ici est valide *au débit d'adaptation*.

Tous calculs faits, on trouve:

— Une hauteur théorique infinie $H_{th,\infty} = 76.9$ m.c.e

- Un coefficient de glissement $\mu = 0.723$
- Une hauteur théorique $H_{th} = 55.6$ m.c.e
- D'où une perte hydraulique $\Delta h = H_{th} - H_n = 55.6 - 49 = 6.6$ m.c.e
- Et un rendement hydraulique $\eta_h = (H_n/H_{th} = 49/55.6 = 0.88$

Question 4:

Voir Fig. 3. Pour plus de précisions sur la décomposition des pertes Δh en pertes par friction (Δh_f) et pertes par désadaptation (Δh_a), se reporter au polycopié de cours. On remarque sur la figure que le modèle $\Delta h = \Delta h_a + \Delta h_f$ avec $\Delta h_f \propto Q_v^2$ et $\Delta h_a(Q_{v,a}) = 0$ n'est pas très bon à haut débit.

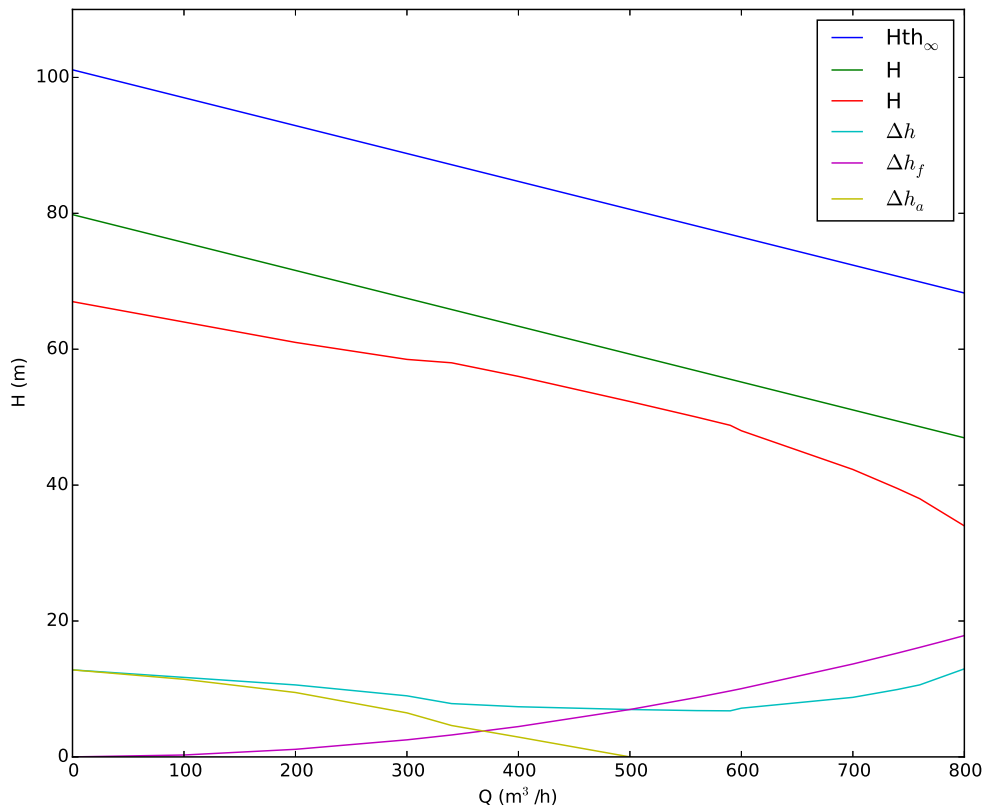


Figure 3 – Tracé des différentes hauteurs manométriques en fonction du débit

Question 5:

Voir le polycopié de cours pour les explications. Le rendement mécanique est la puissance mécanique sur la roue divisée par la puissance mécanique appliquée sur l'arbre \mathcal{P} . C'est donc,

avec P_m les pertes mécaniques:

$$\eta_m = \frac{\mathcal{P} - P_m}{\mathcal{P}} = 0.971$$

Le rendement volumétrique est:

$$\eta_v = \frac{Q_{v,a}}{Q_{v,a} + qv_f} = 0.973$$

Le rendement global est:

$$\eta_g = \eta_h \eta_m \eta_v = 0.83$$

C'est presque celui donné sur la caractéristique constructeur (81%).

Question 6, 7 et 8:

Il s'agit d'appliquer le principe de similitude à notre turbomachine: si la première machine de dimension caractéristique R_A et tournant à la vitesse angulaire ω_A a pour débit nominal Q_A et hauteur nominale H_A , une machine *de géométrie similaire*, fonctionnant à un nombre de Reynolds identique en toute rigueur, ayant une dimension caractéristique R_B et une vitesse angulaire ω_B aura pour débit nominal Q_B et pour hauteur nominale H_B tels que:

$$\frac{Q_A}{\omega_A R_A^3} = \frac{Q_B}{\omega_B R_B^3} = \phi(Re)$$

$$\frac{gH_A}{\omega_A^2 R_A^2} = \frac{gH_B}{\omega_B^2 R_B^2} = \psi(Re)$$

En pratique, pour un nombre de Reynolds Re basé sur la vitesse périphérique et le rayon de la roue $Re \geq 2 \times 10^5$, la dépendance en nombre de Reynolds des coefficients de débit ϕ et coefficients de charge ψ est négligeable (ils sont indépendants de Re). On peut tracer une courbe caractéristique de la machine sous forme adimensionnelle, comme en Fig. 4.

Pour une vitesse de rotation de la même machine de 1800 rpm, on a $Q = 722 \text{ m}^3/\text{h}$ et $H = 73.5 \text{ m}$ au nominal.

Pour une mise à l'échelle à un diamètre extérieur de 300 mm, à 1470 rpm, on a $Q = 232 \text{ m}^3/\text{h}$ et $H = 26.3 \text{ m}$ au nominal.

Pour une mise à l'échelle à un diamètre extérieur de 300 mm, à 1800 rpm, on a $Q = 288 \text{ m}^3/\text{h}$ et $H = 39.5 \text{ m}$ au nominal.

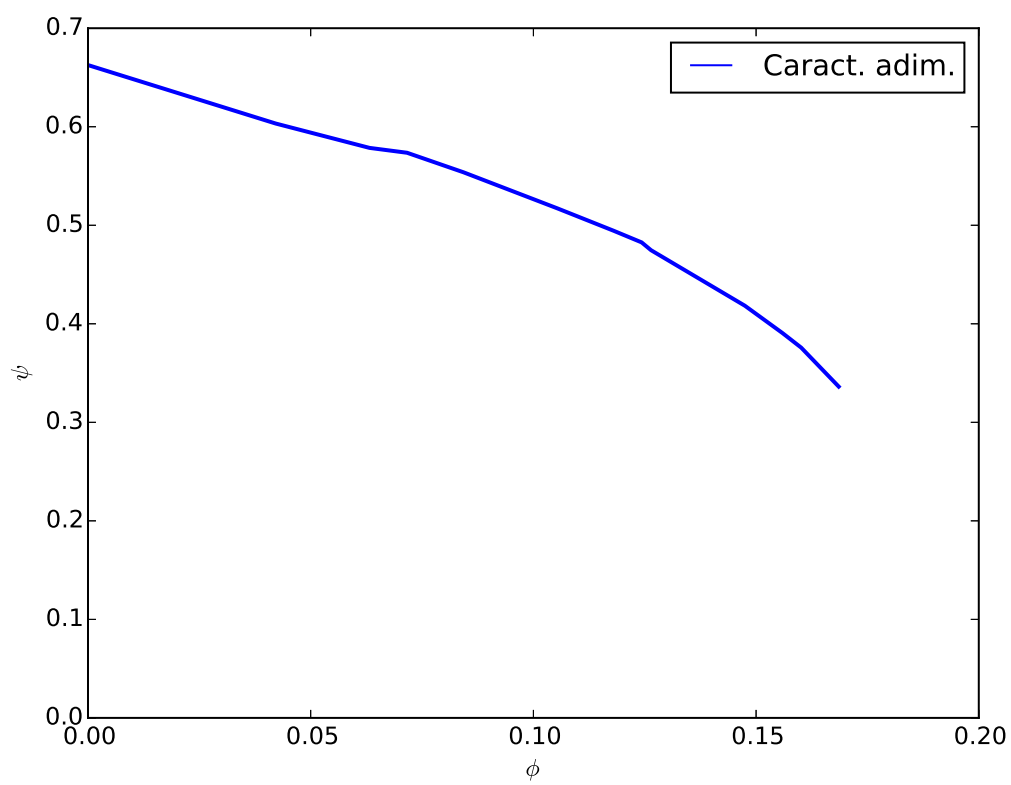


Figure 4 – Caractéristique adimensionnelle, avec $\phi = Q/(\omega R_2^3)$ et $\psi = gH/(\omega R_2)^2$

Script python 2.7 pour l'exercice

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Oct 10 09:53:20 2017
@author: florent
"""

from IPython import get_ipython
get_ipython().magic('reset -sf')
from pylab import *
plt.close("all")

N=1470.0 #rpm
Q=590.0 #m3/h
Hn=49.0 #m
Pm=98.0 #kW
etag=0.81
g=9.81

# Conversion
omega=N/60*2*pi
q=Q/3600

# Question 1
# Mesures : 4.35mm = 100mm
Z=5
fac=0.1/4.35
R1=3.3*fac
print 'R1=', np.around(R1*1000,1), 'mm'
b1=3.4*fac
print 'b1=', np.around(b1*1000,1), 'mm'
R2=8.9*fac
print 'R2=', np.around(R2*1000,1), 'mm'
b2=1.8*fac
print 'b2=', np.around(b2*1000,1), 'mm'
beta2ia=rad2deg(arctan(4.4/2))
print 'Mesure 1: beta2i=', np.around(beta2ia,1), '°'
beta2ib=rad2deg(arctan(4.9/2))
print 'Mesure 2: beta2i=', np.around(beta2ib,1), '°'
beta2ic=rad2deg(arctan(5.5/2))
print 'Mesure 3: beta2i=', np.around(beta2ic,1), '°'
beta2i=(beta2ia+beta2ib+beta2ic)/3
print 'Moyenne: beta2i=', np.around(beta2i,1), '°'
# Calcul
beta10=rad2deg(arctan(2*pi*omega*np.power(R1,2)*b1/q))
print 'beta10=', np.around(beta10,1), '°'
# valeur de dessin 69° pour les deux
```

```

# Question 2
Omega=omega*sqrt(q)*np.power(g*Hn,-0.75)
print 'Omega=', np.around(Omega,3)
Lambda=np.power(10,2.2/6)
print 'Lambda=', np.around(Lambda,3)
Re=Lambda*sqrt(q)*np.power(g*Hn,-0.25)
print 'Re=', np.around(Re*1000,1), 'mm'

# Question 3

U2=R2*omega
S2=2*pi*R2*b2
Cr2=q/S2
Cu2i=U2-Cr2*tan(np.deg2rad(beta2i))
Hthi=U2*Cu2i/g
print 'Hthi=', np.around(Hthi,1), 'm'
mu=1/(1+1.2*(1+cos(deg2rad(beta2i)))/(Z*(1-pow(R1/R2,2))))
print 'mu=', np.around(mu,3)
Hth=mu*Hthi
print 'Hth=', np.around(Hth,1), 'm'
deltaH=Hth-Hn
etah=Hn/Hth

# Question 4
Q=np.array([0,100,200,300,340,400,500,560,590,600,700,740,760,780,800])
H=np.array([67,64,61,58.5,58,56,52.3,50,48.8,48,42.3,39.5,38,36,34])
a=-1/g*U2*tan(np.deg2rad(beta2i))/S2
y=1/g*U2*U2+a*Q/3600
b=Hth-a*q
y2=b+a*Q/3600
pertes=y2-H
c=pertes[6]/pow(Q[6],2)
pertesf=c*pow(Q,2)
pertesa=pertes-pertesf

fig1 = plt.figure()
plt.plot(Q,y,label="Hth$_{\infty}$")
plt.plot(Q,y2,label="H")
plt.plot(Q,H,label="H")
plot(Q,pertes,label="$\Delta h$")
plot(Q,pertesf,label="$\Delta h_f$")
plot(Q,pertesa,label="$\Delta h_a$")
plt.xlabel("Q (m$^3$/h)")
plt.ylabel("H (m)")
plt.xlim(0,800)
plt.ylim(0,110)
plt.legend()

```

```
# Question 5
etav=(590)/(590+16.5)
print 'etav=', np.around(etav,3)
etam=(Pm-2.8)/Pm
print 'etam=', np.around(etam,3)
etag2=etah*etam*etav
print 'etag=', np.around(etag,3)

# Question 6
fig2 = plt.figure()
plt.plot(Q/(omega*pow(R2,3))/3600,g*H/(pow(omega*R2,2)),
label="Caract. adim.")
plt.xlabel("$\phi$")
plt.ylabel("$\psi$")
plt.xlim(0,0.2)
plt.ylim(0,0.7)
plt.legend()

Q1800=590*18/14.7
H1800=49*pow(18/14.7,2)

Q300=590*pow(0.300/(2*R2),3)
H300=49*pow(0.300/(2*R2),2)

Q3001800=590*pow(0.300/(2*R2),3)*18/14.7
H3001800=49*pow(0.300/(2*R2),2)*pow(18/14.7,2)
```

1.2 Turbopompe à Oxygène du moteur Vulcain

Analyse de la roue centrifuge

Question 1:

On relève sur le plan:

- Le rayon de la ligne moyenne à l'entrée $R_1 = 63.5$ mm
- La hauteur d'aubage à l'entrée, qui est le diamètre du cercle "capable" $b_1 = 18.7$ mm
- Le rayon de la ligne moyenne à la sortie $R_2 = 102.7$ mm
- La hauteur d'aubage à la sortie, qui est le diamètre du cercle "capable" $b_2 = 14.9$ mm

On déduit l'angle d'entrée d'aubage en exprimant la condition d'adaptation à l'entrée (voir le photocopié de cours et les triangles de vitesse qui y sont tracés):

$$\tan\beta_{1,0} = \frac{2\pi R_1^2 b_1 \omega}{Q_{v,a}}$$

On trouve $\beta_{1,0} = 75.0^\circ$

Pour la sortie, on calcule l'élévation de pression théorique en nombre d'aubages infini, et on applique le théorème d'Euler. On trouve:

$$\begin{aligned}\eta_h &= 0.875 \\ \Delta P_{th,\infty} &= 190.6 \text{ bars} \\ \beta_{2,\infty} &= 59^\circ\end{aligned}$$

Question 2:

On calcule le NPSP requis par la pompe, sachant que la section au col est 1/4 de la section d'entrée, on a $W_c = 4C_1$:

$$NPSP_r = \frac{1}{2}\rho C_1^2 (1 + 16\lambda) = 32.2 \text{ bars}$$

Question 3:

Le NPSP requis est supérieur au NPSP disponible, donc il va y avoir un (gros) problème de cavitation.

Soit on réduit le NPSP_r en redessinant la pompe: il faudrait réduire les vitesses ou diminuer la cambrure des aubages; tout ceci allant dans le sens d'une machine plus encombrante, cette solution sera écartée dans le contexte du moteur d'une fusée.

Soit on augmente le NPSP disponible en entrée de roue centrifuge, en mettant en amont une autre machine de compression, qui élèvera la pression de ce qu'il faut pour ne pas caviter dans la roue centrifuge, et qui, tant qu'à faire, tolérera un NPSP_d de 1.6 bars.

Analyse de l'inducteur

Question 1:

L'inducteur doit élever la pression de $\Delta p_i = 32.2 - 1.6 = 30.6$ bars.

Question 2:

Avec deux machines en série, on a $\Delta p = \Delta p_c + \Delta p_i = 155.6$ bars.

Question 3:

$\Omega_i = 1.55$ et $\Omega_c = 0.56$. Cela correspond à, respectivement, une machine axiale voire hélico-centrifuge et une machine centrifuge.

Question 4:

$NPSPr_i = 0.7$ bars, donc l'inducteur ne cavite pas. Cette valeur très faible est obtenue grâce à une surface d'entrée plus grande, donc à une vitesse du fluide plus faible dans l'inducteur, et grâce à des aubages très peu cambrés pour l'inducteur. Ils ont en contrepartie une corde très grande et sont enroulé de presque un tour complet autour de l'arbre (observez la vue 3D: cela ressemble à une vis).

2 Turbomachines à fluide compressible

2.1 Tuyère de Laval

Relation d'Hugoniot

1. Bilan de masse (ce qui rentre est égal à ce qui sort):

$$(\rho Au)(x) = (\rho Au)(x + dx) = \dot{m}$$

2. Bilan de quantité de mouvement (le débit net de quantité de mouvement sortant du volume V est égal à la somme des forces agissant sur le volume V):

$$(\rho Au^2)(x + dx) - (\rho Au^2)(x) = \int_{A(x)+S_{lat}+A(x+dx)} (-p\vec{n}) \cdot \vec{e}_x ds \quad (2.1)$$

$$= (pA)(x) - (pA)(x + dx) - \int_{S_{lat}} p\vec{e}_x \cdot \vec{n} ds \quad (2.2)$$

On rappelle le théorème de flux-divergence, appelé aussi théorème de Green-Ostrogradski:

$$\int_{A(x)+S_{lat}+A(x+dx)} \vec{f} \cdot \vec{n} ds = \int_V \text{div}(\vec{f}) dv$$

En particulier, le vecteur \vec{e}_x étant de divergence nulle:

$$\int_{A(x)+S_{lat}+A(x+dx)} \vec{e}_x \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (2.3)$$

$$\int_{S_{lat}} \vec{e}_x \cdot \vec{n} ds = -dA \quad (2.4)$$

On a donc, pour le bilan de quantité de mouvement (Eq. 2.2), en notant pour toute grandeur f (pression, vitesse, masse volumique, section, ...) $f(x + dx) = f + df$, et en utilisant l'Eq. 2.4

$$(\rho + d\rho)(A + dA)(u + du)^2 - (\rho Au^2) = pA - (p + dp)(A + dA) + pdA$$

On développe et on ne garde que les termes du 1^{er} ordre:

$$2\rho Au du + \rho dA u^2 + d\rho A u^2 + A dp = 0 \quad (2.5)$$

3. On utilise la dérivée logarithmique:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} = 0 \quad (2.6)$$

On multiplie l'Eq. 2.6 par $\rho u^2 A$:

$$u^2 A d\rho + \rho u^2 dA + \rho A u du = 0$$

Le bilan de quantité de mouvement (Eq. 2.5) peut s'écrire alors:

$$dp + \rho u du = 0 \quad (2.7)$$

4. On obtient la relation de Bernoulli $p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{cte}$.

5. On a:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds$$

Si $ds = 0$:

$$dp = c^2 d\rho$$

L'Eq. 2.7 devient alors:

$$c^2 d\rho + \rho u du = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{u^2}{c^2} \frac{du}{u} = 0 \quad (2.9)$$

6. On a alors, compte-tenu des Eq. 2.6 et 2.9:

$$\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{du}{u} = 0 \quad (2.10)$$

7. La relation 2.10 est dite relation d'Hugoniot. Cette relation permet de montrer les effets qualitatifs suivants:

- En écoulement subsonique, soit pour $M < 1$, si la tuyère est convergente, c'est-à-dire si $dA < 0$, alors on a $du > 0$ et donc une accélération du fluide. On retrouve un résultat bien connu en écoulement incompressible.
- En revanche, en écoulement supersonique ($M > 1$), pour accélérer le fluide, soit pour avoir $du > 0$, il faut avoir $dA > 0$ c'est-à-dire une tuyère divergente.
- Si quelque part dans la tuyère l'écoulement atteint $M = 1$, ça ne peut être qu'en un endroit où $dA = 0$, donc au col.
- Pour notre tuyère, si on veut accélérer continuellement le fluide depuis le réservoir où $M = 0$, il faut d'abord un convergent, puis la dimensionner de sorte que $M = 1$ au col (tuyère amorcée), et enfin avoir une partie divergente lorsque l'écoulement devient supersonique.

Calcul des grandeurs pour le gaz parfait polytropique

On suppose que le fluide se comporte comme un gaz parfait polytropique d'exposant γ . Son enthalpie massique ne dépend que de la température: $dh = C_p dT$. On suppose de plus que $C_p = \text{cte}$.

1. L'enthalpie totale se conserve:

$$C_p T_0 = C_p T(x) + \frac{1}{2} M^2(x) c^2(x)$$

2. Il faut utiliser $c^2 = \gamma r T$.

$$\frac{T(x)}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(x)\right)^{-1}$$

3. Si l'évolution entre les conditions au réservoir et la section courante est isentropique (sans choc), on peut utiliser la loi de Laplace $p\rho^{-\gamma} = \text{cte}$:

$$\frac{p(x)}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(x)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{\rho(x)}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(x)\right)^{\frac{1}{1 - \gamma}}$$

4. Un peu de réarrangement permet d'obtenir la forme souhaitée

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho u A \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 \frac{u}{\sqrt{\gamma r T}} \sqrt{\gamma r T} \frac{c_0}{\sqrt{\gamma r T_0}} A \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{\frac{T}{T_0}} M \rho_0 c_0 A \end{aligned}$$

5. Si les conditions génératrices sont connues ($\rho_0 c_0$ est fixé), pour une section au col donné A_c , le nombre de Mach au col peut valoir n'importe quelle valeur telle que $0 \leq M_c \leq 1$. La fonction $f(M)$ est croissante dans cet intervalle, et donc le débit peut varier entre 0 et une valeur maximale de $f(1)\rho_0 c_0 A_c$ ($f(1) \simeq 0.579$ pour un gaz parfait polytropique de constante $\gamma = 1.4$).

Partie divergente de la tuyère

On suppose maintenant que la tuyère est amorcée: $M_c = 1$ et le débit est fixé.

1. $f(M) = A_c / A f(1)$.
2. Il y a deux solutions: une subsonique, une supersonique.
3. Il faut appliquer le théorème des quantités de mouvement:

$$\vec{F} = -\dot{m} u_s \vec{e}_x - A_s (p_s - p_a) \vec{e}_x$$

Si la tuyère est adaptée, la poussée est maximale.

Application numérique

Une tuyère est dimensionnée pour détendre un gaz, assimilé à de l'air (gaz parfait polytropique avec $\gamma = 1.4$, $r = 287.5 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) entre un réservoir où $p_0 = 10 \text{ bars}$, $T_0 = 573 \text{ K}$, et la pression atmosphérique (pression de sortie 1 bar). Le débit souhaité est de 4 kg.s^{-1} . On veut obtenir une tuyère adaptée.

1. On a, dans le réservoir $\rho_0 = p_0 / (r T_0) \simeq 6.07 \text{ kg.m}^{-3}$, et $c_0 \simeq 480 \text{ m.s}^{-1}$. Comme $f(1) \simeq 0.579$, pour avoir $\dot{m} = 4 \text{ kg.s}^{-1}$, il faut une section $A_c = 4 / (\rho_0 c_0 f(1)) \simeq 24 \text{ cm}^2$.
2. Graphiquement, un rapport de pression de 0.1 en sortie correspond à un nombre de Mach en sortie de $M_s \simeq 2.16$, et on lit $f(M_s) \simeq 0.3$, soit un rapport de section de 1.93: $A_s = 46.3 \text{ cm}^2$.

3. 123 mm.
4. On calcule la température en sortie avec le rapport de températures pour $M_s \simeq 2.16$: $T_s \simeq 296$ K. On en tire la vitesse du son: $c_s \simeq 345$ m.s⁻¹, et $u_s = 746$ m.s⁻¹, d'où la poussée $Thrust \simeq 2984$ N.

2.2 Dimensionnement d'une turbine à vapeur

Pour les fluides auxquels on s'intéresse, décrits par la donnée de P , V et T liés par une équation d'état, on peut choisir deux variables, et ainsi les décrire complètement¹.

Les diagrammes thermodynamiques permettent de tracer approximativement les évolutions des fluides qui travaillent dans les machines:

- Evolution isobare dans un changeur de chaleur ;
- Evolution isentropique dans les compresseurs et les turbines de détente ;
- Evolution isenthalpique dans les conduites, vannes ou restrictions.

On peut représenter les évolutions dans différents espaces (voir Fig. 5), par exemple en prenant comme variables (P et V), ou (T et S), ou (P et H) ou encore (H et S). Tous ces diagrammes thermodynamiques ont les caractéristiques suivantes:

- Un ensemble de courbes isobares, isochores, isothermes, isenthalpes ou isentropes ;
- Une courbe de saturation en cloche qui délimite les domaines liquide / liquide-vapeur / vapeur ;
- Pour les corps purs, les isobares et les isothermes sont confondus dans la zone diphasique ;
- Lorsque la zone liquide n'est pas représentée, on peut en général supposer que les propriétés du liquide ne dépendent que de la température ;
- A l'intérieur de la zone diphasique, pour un mélange contenant une masse m_l de liquide et une masse m_v de vapeur, toute propriété extensive y (y_v pour la phase vapeur, y_l en phase liquide)² y vérifient la règle dite du levier:

$$y = y_v x + y_l (1 - x)$$

$$x = \frac{m_v}{m_v + m_l}$$

La variable x est le titre (massique) de vapeur dans le mélange.

Diagramme de Clapeyron $P - v$. On trace en abscisses le volume massique et en ordonnées la pression. Son intérêt est que le travail fourni ou consommé durant le cycle est égal à l'aire soustendue par le cycle. Si le parcours est effectué dans le sens horaire, le travail reçu est négatif et le cycle est moteur. Sinon, le cycle est récepteur.

Diagramme entropique $T - s$. On trouve en abscisses l'entropie massique et en ordonnées la température absolue. Sur un tel diagramme, le cycle de Carnot est simplement représenté par un rectangle. Il est également utile pour calculer les transferts thermiques à température constante: $Q = T\Delta S$ pour une transformation réversible, ce qui correspond à l'aire située sous la transformation. On peut alors visualiser le rendement d'un cycle: l'énergie utile est représentée par la surface formée au dessus de la ligne de condensation alors que l'énergie perdue dans la source froide est représentée par la surface formée entre la ligne de condensation et le zéro absolu.

Diagramme de Mollier des motoristes $h - s$. Il est utilisé principalement pour l'étude des cycles moteurs à vapeur. Comme pour le diagramme $T - s$, la zone liquide est quasi confondue avec la courbe de condensation et n'est en principe pas représentée. Il est très utile pour calculer le travail obtenu lors d'une détente isentropique (ou non) dans une turbine: connaissant les pressions hautes et basses, ainsi que l'enthalpie de départ, on peut en déduire le Δh qui est le travail récupéré. On peut alors lire sur le diagramme le titre en vapeur en sortie de turbine.

¹ Systèmes divariants

² Par exemple h, s, v .

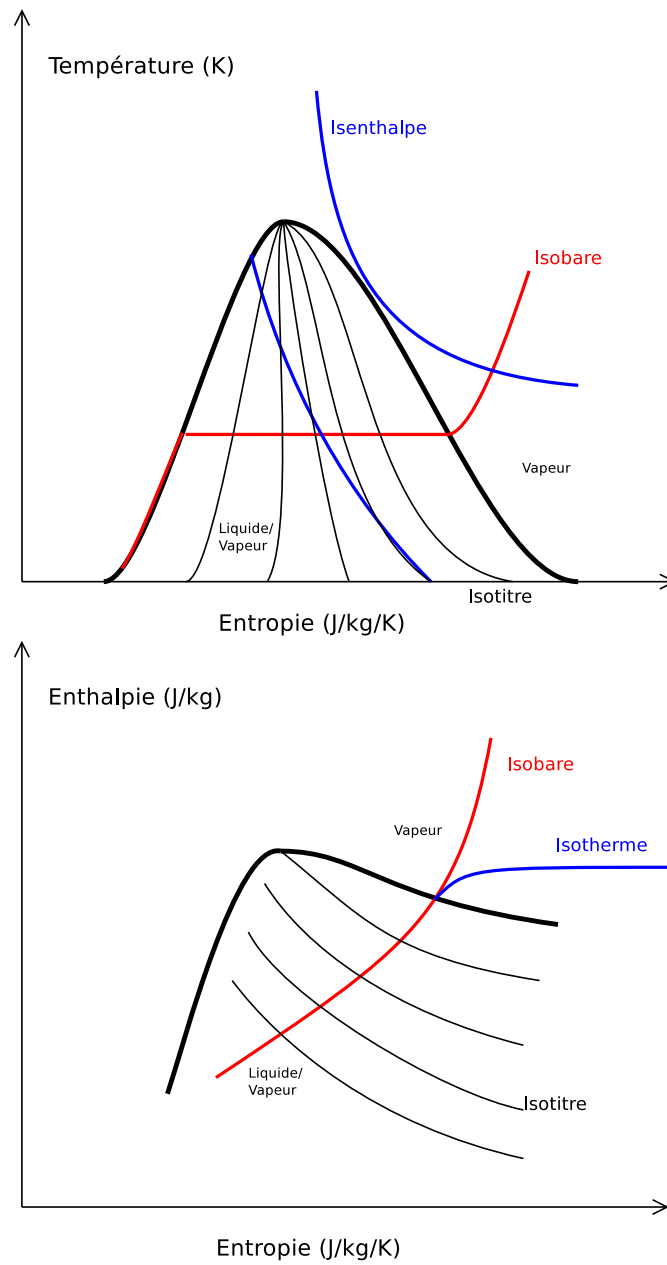


Figure 5 – Diagrammes $T - s$ et $h - s$ de l'eau

Question 1: On relève la température de stauration à 6 bars:

$$T = 158^{\circ}\text{C}$$

On place le point correspondant à la condition thermodynamique en entrée de machine $P = 6$ bars, $T = 250^{\circ}\text{C}$, et on trace une verticale dans le diagramme (c'est-à-dire une évolution isentropique) jusqu'à la pression de sortie de la turbine $P = 1$ bar. On relève la chute d'enthalpie potentielle correspondante:

$$\Delta h_s = -350.0 \text{kJ.kg}^{-1}$$

Question 2:

On applique le premier principe, avec \mathcal{P} la puissance, \dot{m} le débit massique et η le rendement isentropique:

$$\mathcal{P} = \eta \dot{m} \Delta h_s$$

On a $\dot{m} = 9.52 \text{ kg.s}^{-1}$ soit un débit volumique de $34.3 \text{ m}^3/\text{h}$ pour la pompe (avec une masse volumique de 1000 kg.m^{-3}). La hauteur manométrique totale de la pompe correspond à une élévation de pression de $6 - 1 = 5$ bars: $HMT = 51 \text{ m.c.e.}$

Question 3:

On applique le théorème d'Euler (sans rotation en sortie):

$$\Delta h_{s, \text{etage}} = -U_1 C_{\theta 1}$$

On montre que pour un étage à action (degré de réaction nul), on a:

$$C_{\theta 1} = 2U_1$$

On applique à notre cas (attention, le Δh_s calculé à la question 1 concerne *deux* étages de détente:

$$U_1 = \sqrt{\Delta h_{s, \text{etage}}/2} = \sqrt{\Delta h_{s, \text{turbine}}/4} = 295.8 \text{m.s}^{-1}$$

Question 4:

Par lecture graphique sur le diagramme de Mollier, on trouve:

$$P_{1er \text{ etage}} = 2.6 \text{ bars}$$

$$T_{1er \text{ etage}} = 185^{\circ}\text{C}$$

Par calcul, en utilisant un modèle de gaz parfait, on trouve des valeurs très proches (2.64 bars pour la pression).

Pour la sortie de la turbine, on a $T_{sortie} = 120^\circ\text{C}$.

Question 5:

On utilise la loi d'état des gaz parfaits pour évaluer la masse volumique en sortie de distributeur au premier étage ($1.23 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) afin d'en déduire le débit volumique à cet endroit de la turbine.

N	R	b_1
tr/min	mm	mm
6000	470.8	12.0
9000	313.8	17.9
12000	235.4	23.8

Table 2.1 – Paramètre géométrique du premier étage en fonction de la vitesse de rotation

Question 6:

On aura une machine plus compacte, avec un rapport b/R optimal de 10%.

Question 7:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{1}{\phi}\right) = 69.7^\circ$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\beta_1 = -\beta_2 = \arctan\left(\frac{2}{\phi}\right) = 53.5^\circ$$

Question 8:

On calcule la vitesse du son:

$$a_1 = \sqrt{\gamma r T_1} = 543.2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

On calcule la vitesse en sortie de distributeur:

$$C_1 = \sqrt{C_{a1}^2 + C_{\theta 1}^2} = U_1 \sqrt{4 + \phi^2} = 630.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

D'où le nombre de Mach

$$M_1 = 1.16$$

Il est supérieur à 1, on a donc risque de blocage sonique. Il faut peut-être rajouter un étage pour diminuer $\Delta h_{s,etage}$ et donc diminuer toutes les vitesses.