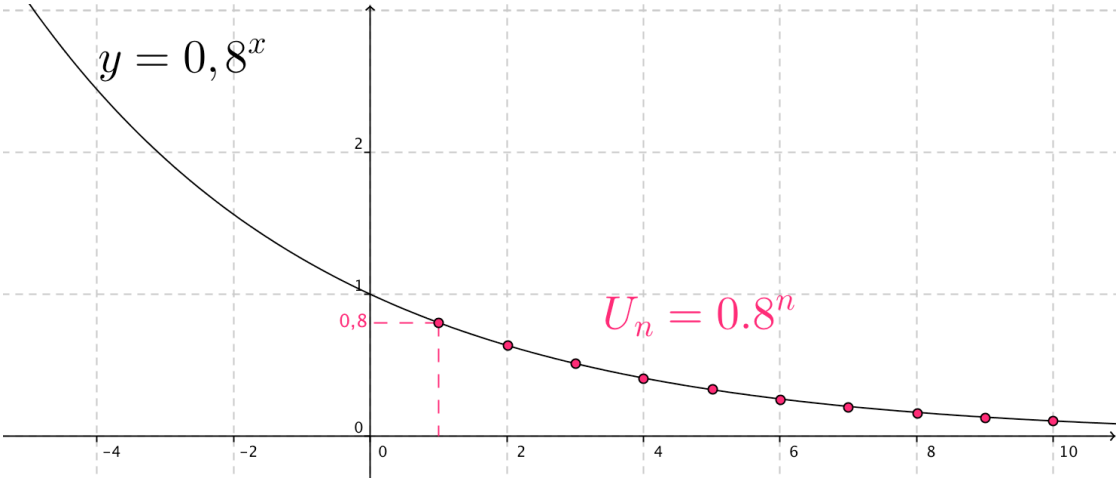
Les fonctions exponentielles

I – Fonction exponentielle de base q

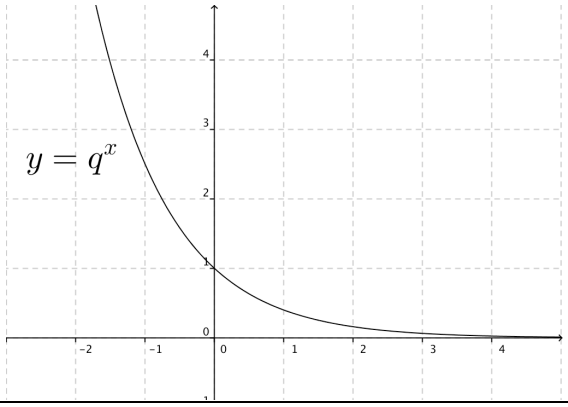
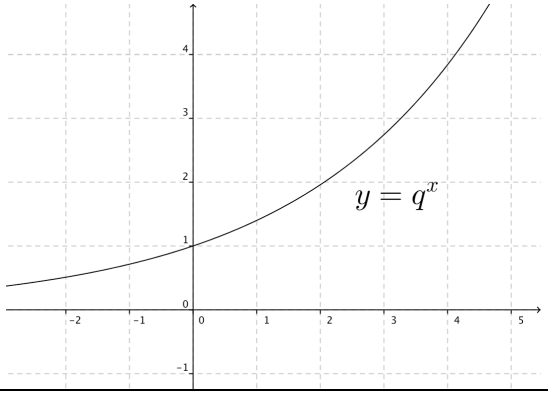
1. Définition : **q** étant un **réel strictement positif**, on appelle fonction exponentielle de base q la fonction définie sur ℝ, qui à tout réel x associe q^x.

$$f : x \longmapsto q^x$$

Remarque : tout réel a pour image un nombre strictement positif.
La suite (U_n) définie par $U_n = q^n$ est analogue à la fonction exponentielle de base q mais elle n'a pas le même ensemble de définition



2. Sens de variation et limites : admis par analogie avec la suite géométrique

Si 0 < q < 1 La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur ℝ. $\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = 0$	
Si 1 < q La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur ℝ. $\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = +\infty$	

Remarque : Toute représentation graphique d'une fonction exponentielle de base q passe par le point de coordonnéés (0 ;1) en effet $q^0 = 1$

3. Relation fonctionnelle :
   Propriété :
   Pour tous réels x, y, et q avec $q > 0$, $q^{x+y} = q^x\, q^y$.

   donc si f est la fonction exponentielle de base q alors $f(x+y) = f(x)\, f(y)$,
   on dit que les fonctions exponentielles transforment une somme en un produit.

   Conséquences :
   Soit q et r deux réels strictement positifs, pour tous réels a et b,
   ■ $q^{-a} = \dfrac{1}{q^a}$,
   démonstration :
   $q^a \times q^{-a} = q^{a-a} = q^0 = 1$ donc $q^{-a} = \dfrac{1}{q^a}$
   ■ $q^{a-b} = \dfrac{q^a}{q^b}$
   démonstration :
   $q^{a-b} = q^{a+(-b)} = q^a \times q^{-b} = \dfrac{q^a}{q^b}$
   ■ $(q^a)^b = q^{ab}$
   démonstration :
   si b est un nombre positif
   $(q^a)^b = \underbrace{q^a \times q^a \times \ldots \times q^a}_{b\ fois} = q^{a+a+\cdots+a} = q^{ab}$
   si b est un nombre négatif, -b est un nombre positif
   $q^{ab} = q^{a(-(-b)}$ or $q^{a(-b)} = q^{-ab}$ d'après ce qui précède
   donc $q^{ab} = q^{-(-ab)} = q^{ab}$
   ■ pour tout entier naturel n, $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre qui à la puissance n est égal à q.
   donc tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$
   démonstration :
   $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q^{\frac{1}{n} \times n} = q$
   ■ $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$ cas particulier de ce qui précède, n = 2

Ces conséquences étaient déjà connues dans le cas où l'exposant est un nombre entier, on les a démontrées pour tous les réels

II – La fonction exponentielle :

1. Définition :
   On appelle fonction exponentielle l'unique fonction exponentielle de base q ayant 1 pour nombre dérivé en 0.

2. Notation :
   La fonction exponentielle est notée exp
   L'image de 1 par la fonction exponentielle, donc sa base, est notée e. (e a une valeur proche de 2,718).
   L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est notée e^x.
   on note exp : $x \longmapsto e^x$

3. Propriété fondamentale :

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur ℝ , elle est égale à sa fonction dérivée donc $(e^x)' = e^x$

Démonstration :

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \times e^h - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

Le nombre dérivée est la limite de ce quotient quand h tend vers 0, et e^x est un nombre indépendant de h donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \times \lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h}$$

or $e^0 = 1$ donc $\lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(e^0 e^h - e^0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(e^{0+h} - e^0)}{h}$

C'est donc le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0, or par définition ce nombre dérivé est égal à 1

donc $\lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x$

donc pour tout x, $(e^x)' = e^x$

4. Étude de la fonction exp :

<u>Ensemble de définition :</u>

La fonction exp est définie sur ℝ

<u>Sens de variation :</u>

$(e^x)' = e^x$ donc la dérivée est positive et la fonction exponentielle est croissante sur ℝ.

<u>Limites :</u>

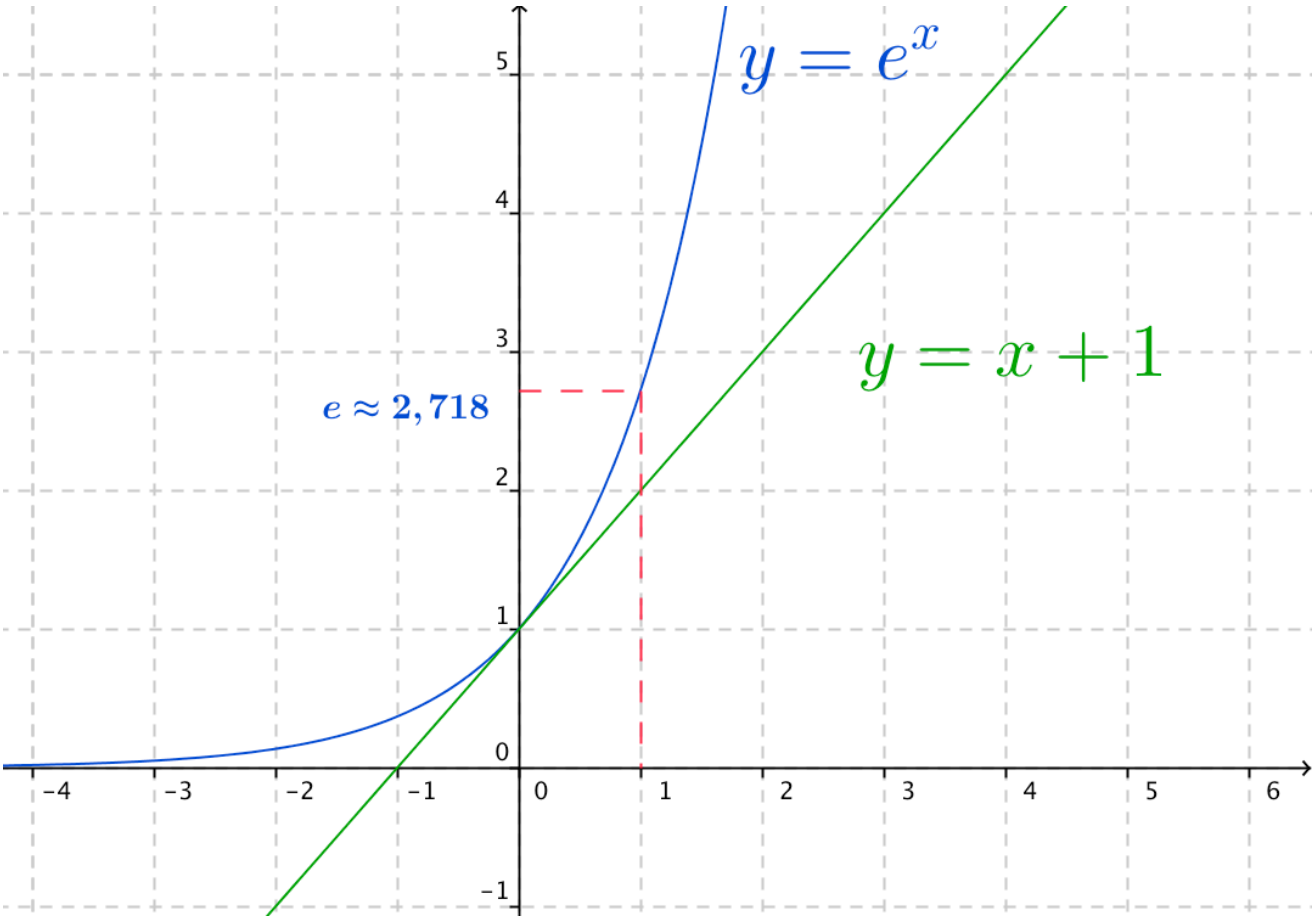
$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

<u>Tangente à la courbe au point de coordonnées (0;1) :</u>

Son coefficient directeur est le nombre dérivé au pour x = 0 donc par définition 1.
Son ordonnée à l'origine est 1 puis que le point est sur l'axe des ordonnées.
L'équation de cette tangente est donc :

$$y = x+1.$$

Représentation graphique de la fonction exp:



5. Résolution d'équations, d'inéquations :

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur ℝ donc :

Si deux points de sa représentation graphique ont la même ordonnée ils sont confondus donc leur abscisse est la même.
autre formulation :
Deux nombres ont la même image si et seulement si ils sont égaux.

$$\boldsymbol{e^A = e^B \Leftrightarrow A = B}$$

Deux points de sa représentation graphique ont leurs abscisses et leurs ordonnées rangées dans le même ordre.
autre formulation :
Deux nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre

$$\boldsymbol{e^A \geq e^B \Leftrightarrow A \geq B}$$

III – Fonction $e^{u(x)}$:

1. Définition :

   Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
   La fonction $f = e^u$ est définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$

2. Sens de variation :

   Propriété admise
   La fonction $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout x de I :
   $\boldsymbol{f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}}$ on peut aussi noter $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$.

   Signe de la dérivée
   Or $e^{u(x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $u'(x)$ donc la fonction f a le même sens de variation que la fonction u sur I.