Chapitre 9. La fonction exponentielle

Le chapitre sur la fonction exponentielle est quasiment indissociable du chapitre suivant sur la fonction logarithme népérien.

I. Définition de la fonction exponentielle

Plus loin, la fonction exponentielle sera définie comme l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1. \quad (*)$$

Nous n'avons pas les moyens en terminale de démontrer l'existence d'une telle fonction et nous l'admettrons. Cependant, nous pouvons prouver que si une telle fonction existe, alors il n'y en a qu'une.

Le théorème suivant prépare la démonstration de l'unicité en démontrant d'abord qu'une fonction vérifiant $(*)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

Alors, pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$. En particulier, la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ g(x) = f(x) \times f(-x).$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \text{ (car } f' = f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction g est nulle. On sait alors que la fonction g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
Par suite, pour tout réel x, $g(x) = g(0) = (f(0))^2 = 1$.

On a montré que pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$. En particulier, pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) \neq 0$ puis $f(x) \neq 0$.

Ainsi, une fonction f telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On peut maintenant démontrer l'unicité d'une fonction vérifiant $(*)$.

Théorème 2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$f' = f,\ g' = g,\ f(0) = 1 \text{ et } g(0) = 1.$$

Alors, $f = g$.

Démonstration. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = f$, $g' = g$, $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$.

D'après le théorème 1, la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On peut donc poser $h = \dfrac{f}{g}$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} = 0.$$

La dérivée de h est nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$.
Par suite, pour tout réel x, $h(x) = h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Ainsi, pour tout réel x, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ou encore, pour tout réel x, $f(x) = g(x)$. On a montré que $f = g$ ou encore on a montré l'unicité d'une fonction f vérifiant la relation $(*)$.

On peut maintenant donner la définition de la fonction exponentielle.

Définition 1. La fonction exponentielle est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0.
Pour tout réel x, l'exponentielle du réel x est notée $\exp(x)$. Par définition,

$$\text{pour tout réel } x,\ \exp'(x) = \exp(x) \text{ et } \exp(0) = 1.$$

On rappelle que l'on admet l'existence d'une telle fonction.

II. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

1) Relation fonctionnelle

Théorème 3. Pour tous réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Démonstration. Soit y un réel fixé. On sait d'après le théorème 1 que $\exp(y) \neq 0$.
Pour tout réel x, on peut donc poser $f(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, posons $u(x) = x + y$ puis $g(x) = \exp(x+y) = \exp(u(x))$.
Pour tout réel x, $u'(x) = 1 + 0 = 1$ puis, d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, pour tout réel x,

$$g'(x) = \exp'(u(x)) \times u'(x) = \exp(u(x)) \times 1 = \exp(x+y).$$

Comme $\dfrac{1}{\exp(y)}$ est une constante quand x varie, on en déduit que pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\exp(y)}g\right)'(x) = \frac{1}{\exp(y)}g'(x) = \frac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y) = f(x).$$

D'autre part, $f(0) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(0+y) = 1$. Ainsi, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Par unicité d'une telle fonction (d'après le théorème 2), f est la fonction exponentielle.

Par suite, pour tout réel x, $\dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y) = \exp(x)$ ou encore $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

---

2) Le nombre e. Changement de notation

On pose

$$e = \exp(1) = 2,718\ldots.$$

(fourni par la calculatrice). On a donc $\exp(1) = e = e^1$ et aussi $\exp(0) = 1 = e^0$. Poursuivons.
$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \times \exp(1) = e \times e = e^2$ (avec $e^2 = 7,389\ldots$ (fourni par la calculatrice)) puis
$\exp(3) = \exp(2+1) = \exp(2) \times \exp(1) = e^2 \times e = e^3$.
Plus généralement, une démonstration par récurrence permet de prouver que pour tout entier naturel n, $\exp(n) = e^n$.
Si n est un entier relatif strictement négatif, le théorème 1 fournit $\exp(n) \times \exp(-n) = 1$ et donc $\exp(n) = \dfrac{1}{\exp(-n)} = \dfrac{1}{e^{-n}} = e^n$ (puisque $-n > 0$, $\exp(-n) = e^{-n}$).
Donc, pour tout entier relatif, $\exp(n) = e^n$.

A partir de ce qui précède et pour d'autres raisons que l'on ne connaît pas en terminale, on décide de poser

$$\text{pour tout réel } x,\ \exp(x) = e^x.$$

On se permet donc maintenant d'avoir un exposant réel et plus uniquement un exposant entier. On a donné un sens à des nombres comme $e^{0,1}$ ou e^π. Mais e^π ne s'interprète plus en disant que l'on a écrit un produit de π facteurs tous égaux à e car π n'est pas un entier.

3) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Théorème 4. **1)** Pour tous réels x et y, $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
2) Pour tout réel x, $e^x \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
3) Pour tous réels x et y, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
4) Pour tout réel x et tout entier relatif n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

Démonstration. 1) est déjà connu à partir du théorème 3. 2) est aussi déjà connu à partir du théorème 1 mais nous préférons le déduire de la relation fondamentale 1).

Soient x et y deux réels. $e^{x-y} \times e^y = e^{x-y+y} = e^x$ et donc, puisque $e^y \neq 0$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

En particulier, $e^{-x} = e^{0-x} = \dfrac{e^0}{e^x} = \dfrac{1}{e^x}$.

Soit x un réel. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

• Pour $n = 0$, $(e^x)^0 = 1 = e^{0\times x}$. La formule est donc vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $(e^x)^n = e^{nx}$ et montrons que $(e^x)^{n+1} = e^{(n+1)x}$.

$$\begin{aligned}(e^x)^{n+1} &= (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= e^{nx+x} = e^{(n+1)x}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

Soit maintenant n un entier relatif strictement négatif. Alors $-n$ est un entier naturel strictement positif et donc

$$(e^x)^n = \frac{1}{(e^x)^{-n}} = \frac{1}{e^{-nx}} = e^{nx}.$$

On a montré que pour tout entier relatif n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

Exercice 1. 1) Simplifier l'expression $\dfrac{(e^a)^2 \times e^a}{e^{4a}}$.

2) Simplifier les expressions $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ et $(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2$.

Solution. 1) Soit a un réel.

$$\frac{(e^a)^2 \times e^a}{e^{4a}} = \frac{e^{2a} \times e^a}{e^{4a}} = e^{2a+a-4a} = e^{-a}.$$

2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 &= \left((e^x)^2 + 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2\right) - \left((e^x)^2 - 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2\right)\\ &= 2e^0 + 2e^0 = 4,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 &= (e^x)^2 + 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 + (e^x)^2 - 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2\\ &= e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x} = 2\left(e^{2x} + e^{-2x}\right).\end{aligned}$$

III. *Propriétés analytiques de la fonction exponentielle*

1) Sens de variation de la fonction exponentielle

Théorème 5. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 1. On sait que $e^0 = 1$ et en particulier, $e^0 > 0$. On sait aussi que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème 1.

Supposons par l'absurde que la fonction exponentielle prenne une valeur strictement négative en un certain réel a (donc $e^a < 0$ et $e^0 > 0$). Puisque la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$), le théorème des valeurs intermédiaires permettrait d'affirmer que la fonction exponentielle prend au moins une fois la valeur 0 (0 étant un nombre de l'intervalle $[e^a, e^0]$). Ceci est impossible et donc pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

Démonstration 2. Pour tout réel x, $e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0$. D'autre part, la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et donc, pour tout réel x, $e^x > 0$.

Exercice 2. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
1) Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que la fonction f est impaire.

Solution. **1)** On sait que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout réel x, on a $e^x + 1 > 1$. En particulier, pour tout réel x, $e^x + 1 \neq 0$. On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\dfrac{1}{e^x} - 1}{\dfrac{1}{e^x} + 1} = \frac{\dfrac{1 - e^x}{e^x}}{\dfrac{1 + e^x}{e^x}} = \frac{1 - e^x}{e^x} \times \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x).$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$ et donc f est impaire.

Théorème 6. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée qui est encore la fonction exponentielle, est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le théorème précédent a des conséquences pour la résolution des équations et des inéquations.

Théorème 7. **1) a)** Pour tous réels a et b, $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.
b) Pour tous réels a et b, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.
2) Pour tout réel x, $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Remarque. Tant que nous ne disposons pas de la fonction logarithme népérien étudiée au chapitre suivant, nous ne pouvons résoudre que peu d'équations ou d'inéquations contenant des exponentielles. Par exemple, nous ne sommes pas encore capables de résoudre une équation aussi simple que l'équation $e^x = 2$.

Exercice 3.
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-5x+1} = 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} = 0$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{(x^2)} = e^4$.

Solution. **1)** Soit x un réel.

$$e^{-5x+1} = 1 \Leftrightarrow -5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $e^{-5x+1} = 1$ est $\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

2) La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc l'équation $e^{2x} = 0$ n'a pas de solution.

3) Soit x un réel.

$$e^{(x^2)} = e^4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $e^{(x^2)} = e^4$ est $\{-2; 2\}$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - (1 + e^2)e^x + e^2 = 0 \quad (E)$.

Solution. On sait que pour tout réel x, $e^{2x} = (e^x)^2$ et donc pour tout réel x,

$$e^{2x} - (1 + e^2)e^x + e^2 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - (1 + e^2)e^x + e^2 = 0 \qquad (*)$$

Pour tout réel x, posons $X = e^x$. D'après $(*)$,

$$e^{2x} - (1 + e^2)e^x + e^2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - (1 + e^2)X + e^2 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $X^2 - (1+e^2)X + e^2 = 0$ est

$$\Delta = \left(-(1+e^2)\right)^2 - 4e^2 = 1 + 2e^2 + e^4 - 4e^2 = 1 - 2e^2 + e^4 = (e^2-1)^2.$$

L'équation $X^2 - (1+e^2)X + e^2 = 0$ admet donc deux solutions : $X_1 = \dfrac{1+e^2+e^2-1}{2} = e^2$ et $\dfrac{1+e^2-e^2+1}{2} = 1$.
L'ensemble des solutions de l'équation $X^2 - (1+e^2)X + e^2 = 0$ est $\left\{1; e^2\right\}$.

Par suite, pour tout réel x, x est solution de (E) si et seulement si e^x appartient à $\left\{1; e^2\right\}$.
Ensuite, $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = e^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $e^{2x} - (1+e^2)e^x + e^2 = 0$ est $\{0; 2\}$.

Exercice 5.
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-5x+1} > 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{(x^2-3x)} \leqslant e^{-2}$.

Solution. 1) Soit x un réel.

$$e^{-5x+1} > 1 \Leftrightarrow -5x+1 > 0 \Leftrightarrow -5x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{-1}{-5} \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-5x+1} > 1$ est $\left]-\infty, \dfrac{1}{5}\right[$.

2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned} e^{(x^2-3x)} \leqslant e^{-2} &\Leftrightarrow x^2 - 3x \leqslant -2 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 3x + 2$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$. L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet donc deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet alors de donner le signe du trinôme $x^2 - 3x + 2$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{(x^2-3x)} \leqslant e^{-2}$ est $[1; 2]$.

---

2) Limites de e^x en $-\infty$ et $+\infty$

Théorème 8. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Démonstration. Nous allons montrer que pour tout réel positif x, $e^x \geqslant x$.
Pour cela, posons pour tout réel positif x, $f(x) = e^x - x$.
La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = e^x - 1.$$

D'après le théorème 7, pour tout réel positif x, on a $f'(x) \geqslant 0$. On en déduit que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f(0) = e^0 - 0 = 1$, pour tout réel positif x, on a $f(x) \geqslant f(0)$ ou encore pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant 1$ et en particulier, pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant 0$. Mais alors, pour tout réel positif x, $e^x \geqslant x$.

Comme pour tout réel positif x, $e^x \geqslant x$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

La limite de e^x en $-\infty$ se déduit de la limite de e^x en $+\infty$ de la façon suivante :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} e^{-(-x)} = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0,$$

car $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

Exercice 6.
1) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}(e^x+x+1)$ et $\lim_{x\to-\infty}(e^x+x+1)$.
2) Déterminer $\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-2x+3}$.

Solution. **1)** D'après le cours, $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et d'autre part $\lim_{x\to+\infty}x+1=+\infty$. En additionnant les deux fonctions, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x+x+1)=+\infty.$$

D'après le cours, $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ et d'autre part $\lim_{x\to-\infty}x+1=-\infty$. En additionnant les deux fonctions, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty}(e^x+x+1)=-\infty.$$

2) $\lim_{x\to-\infty}(-2x+3)=+\infty$ puis, d'après le cours, $\lim_{x\to-\infty}e^{-2x+3}=\lim_{X\to+\infty}e^X=+\infty$. D'autre part, $\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$. En multipliant les deux fonctions, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-2x+3}=+\infty.$$

Exercice 7. Pour tout réel x, on pose $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution. **Limite de f en $-\infty$.** D'après le cours, $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$. Donc

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel x, $e^x\neq0$ puis

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

$\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ puis, d'après le cours, $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{X\to-\infty}e^X=0$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

---

3) Deux théorèmes de croissances comparées

Quand x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$ et x tend vers $+\infty$. Nous ne savons donc momentanément pas calculer $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$ puisque nous sommes en présence d'une forme indéterminée. Le théorème suivant lève cette indétermination et une autre indétermination.

Théorème 9. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$.

Démonstration. Pour démontrer le théorème 8, nous avons d'abord vérifié que pour tout réel positif x, $e^x\geqslant x$. Etablissons de même une minoration utile de $\dfrac{e^x}{x}$ quand x est un réel strictement positif.

Soit x un réel strictement positif.

$$\frac{e^x}{x}=\frac{e^{\frac{x}{2}}\times e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

Puisque $u=\dfrac{x}{2}$ est un réel positif, $e^u\geqslant u$ ou encore $e^{\frac{x}{2}}\geqslant\dfrac{x}{2}$ puis en divisant par le réel strictement positif $\sqrt{x}$, on obtient $\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\geqslant\dfrac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x}}$. Or, $\dfrac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. On en déduit que $\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\geqslant\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ puis que $\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2$ (par croissance de la fonction $t\mapsto t^2$ sur $[0,+\infty[$) ou enfin que

$$\frac{e^x}{x}\geqslant\frac{x}{4}.$$

Ainsi, pour tout réel strictement positif, $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{4}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Ensuite, on déduit la limite de xe^x en $-\infty$ de la limite en $+\infty$ de $\dfrac{e^x}{x}$ de la façon suivante :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} -(-x)e^{-(-x)} = \lim_{X\to+\infty} -Xe^{-X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{1}{e^X/X} = 0,$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Les deux fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$ tendent vers $+\infty$ en croissant. Mais la croissance de la fonction $x \mapsto e^x$ vers $+\infty$ est bien plus rapide que celle de la fonction $x \mapsto x$. On dit que **la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction $x \mapsto x$ en $+\infty$.**

De même, quand on calcule la limite en $-\infty$ du produit xe^x, on est en présence d'une forme indéterminée du type $\infty\times 0$. Le théorème précédent lève cette indétermination et encore une fois, **la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction $x \mapsto x$ en $-\infty$.**

Exercice 8.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^x$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x}{e^x - 1}$.

Solution. 1) Pour tout réel x, $(x+1)e^x = xe^x + e^x$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et d'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. En additionnant les deux fonctions, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x = 0.$$

2) Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{e^x - x}{e^x - 1} = \frac{e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \dfrac{x}{e^x}}{1 - \dfrac{1}{e^x}}.$$

D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et donc, en passant à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc, en prenant l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. Mais alors,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{x}{e^x}}{1 - \dfrac{1}{e^x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

---

4) Graphe de la fonction exponentielle

• On connaît déjà le sens de variation de la fonction exponentielle ainsi que les limites de cette fonction en $-\infty$ et $+\infty$. On peut résumer ces différents résultats dans un tableau de variations.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	$+$	
$\exp$	$0 \nearrow$	$+\infty$

• Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, l'axe (Ox) est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

• On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction exponentielle a la même allure que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ quand x tend vers $+\infty$.

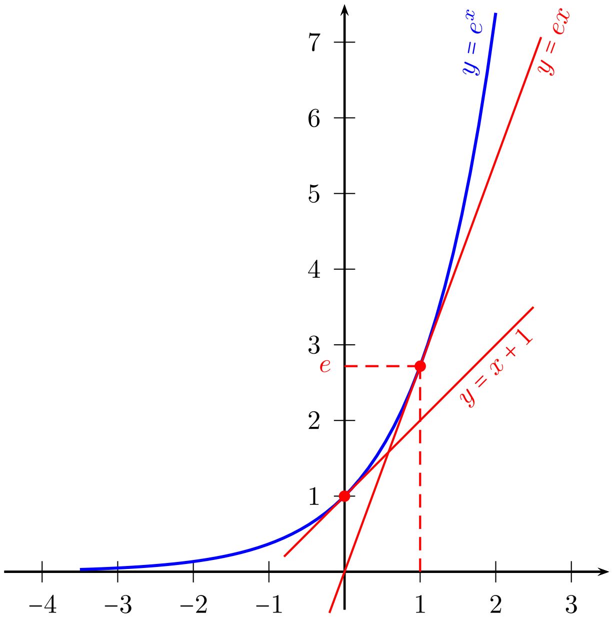
• Par définition, $\exp'(0) = \exp(0) = 1$. Ecrivons explicitement la limite que fournit cette égalité. Pour tout réel non nul x, $\dfrac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \dfrac{e^x - e^0}{x - 0}$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(0,1)$ est égal à 1. Cette tangente est donc la droite d'équation $y = x + 1$.

• Une autre tangente est intéressante à tracer à savoir la tangente au point d'abscisse 1 car elle passe par l'origine. En effet, $\exp(1) = e$ et $\exp'(1) = e$. Donc, la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1 a pour équation $y = e(x-1) + e$ ou encore $y = ex$.

Voici le graphe de la fonction exponentielle.



5) Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Le théorème de dérivation d'une fonction composée fournit immédiatement :

Théorème 10. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit f la fonction définie sur I par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ f(x) = e^{u(x)}.$$

La fonction f est dérivable sur I et

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I,\ f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

On retiendra

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = xe^{-x^2}.$$

1) Déterminer la dérivée de f.

2) Montrer que f est impaire.

3) a) Montrer que pour tout réel positif x, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{2x^2}{e^{2x^2}}}$.

b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

4) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

5) Construire le graphe de f.

Solution. **1)** Pour tout réel x, posons $u(x) = -x^2$ puis $g(x) = e^{-x^2} = e^{u(x)}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -2xe^{-x^2}.$$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times \left(-2xe^{-x^2}\right) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

2) Soit x un réel.

$$f(-x) = (-x)e^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x).$$

Donc la fonction f est impaire.

3) a) Soit x un réel positif.

$$f(x) = xe^{-x^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{e^{-x^2} \times e^{-x^2}} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{e^{-x^2-x^2}} = \sqrt{x^2e^{-2x^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{x^2}{e^{2x^2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{2x^2}{e^{2x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2x^2}{e^{2x^2}}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$ puis, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x^2}}{2x^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.
En passant à l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{e^{2x^2}} = 0$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2}{e^{2x^2}}} = \sqrt{0} = 0$ et finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2x^2}{e^{2x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 = 0.$$

c) En posant $X = -x$ et puisque f est impaire, on obtient

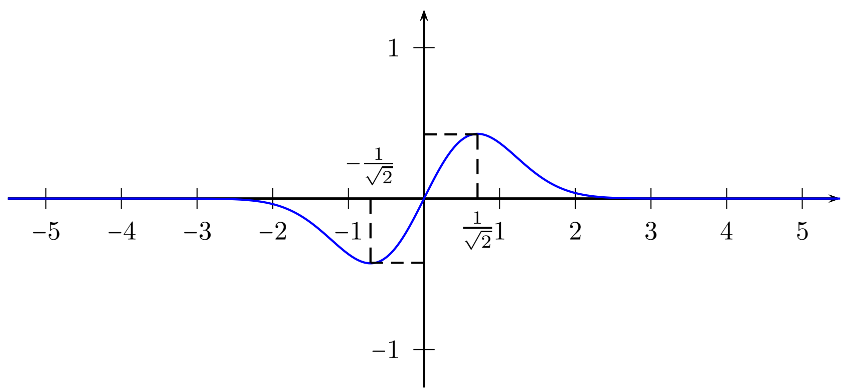
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -f(-x) = \lim_{X\to+\infty} -f(X) = 0.$$

4) Pour tout réel x, $f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$. Puisque pour tout réel x, on a $e^{-x^2} > 0$, $f'(x)$ est pour tout réel x du signe de $1-2x^2$. $1-2x^2$ s'annule pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet alors de donner le signe du trinôme $1-2x^2$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

5) Graphe de f. (on a pris 1cm pour unité en abscisse et 2cm en ordonnée)



6) Primitives

Théorème 11. **1)** Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x + k$ où k est un réel.
2) Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)} + k$ où k est un réel.
En particulier, si a est un réel non nul et b est un réel, les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b} + k$ où k est un réel.

On retiendra

une primitive de $u'e^u$ est e^u.

Exercice 10.
1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_1 \ : \ x \mapsto e^{-x}$.

2) Déterminer une primitive de la fonction $f_2 \ : \ x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

3) Déterminer une primitive de la fonction $f_3 \ : \ x \mapsto xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. **1)** Une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{-1}e^{-x}$ ou encore la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.

2) Pour $x > 0$, posons $u(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Par suite, pour tout réel $x > 0$, $f_2(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Une primitive de la fonction f_2 sur $]0, +\infty[$ est donc la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ ou encore la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

3) Pour tout réel x, $f_3(x) = \dfrac{1}{2} \times (2x) \times e^{x^2}$. Donc si pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$, alors pour tout réel x, $f_3(x) = \dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$. Une primitive de la fonction f_3 sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{u(x)}$ ou encore la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{x^2}$.