Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 13

Fonction exponentielle

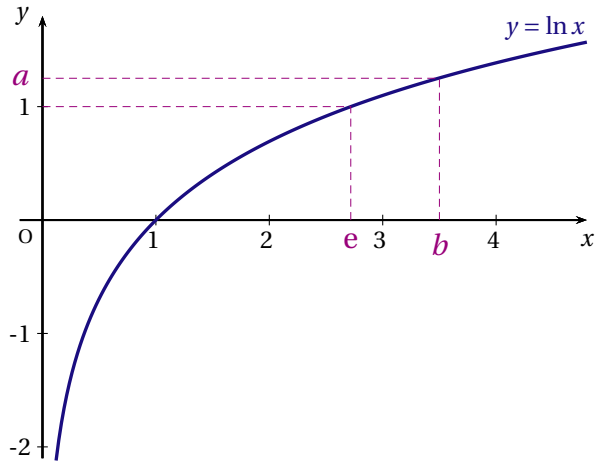
Adrien Fontaine
Année scolaire 2018–2019

1. Fonction exponentielle

1.1. Définition et premières propriétés

Nous pouvons généraliser la démarche qui nous a permis d'introduire dans le chapitre précédent le nombre e. Il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel a quelconque : il existe un unique nombre réel b tel que : $\ln(b) = a$.

Ainsi, pour $a = 1$, on trouve $b = e$. Pour $a = 2$, on trouve $b = e^2$. Pour $a = 3$, on trouve $b = e^3$. Pour $a = -1$, on trouve $b = e^{-1}$. Et pour $a = n$, où n est un entier relatif, on trouve $b = e^n$.



Définition 1 :

Le nombre b tel que $\ln(b) = a$ est appelé **exponentielle de** a et noté e^a.

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $]0;+\infty[$.

$$]0;+\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad]0;+\infty[\xleftarrow{\exp} \mathbb{R}$$

Notation : On notera le plus souvent $\exp(x) = e^x$.

Proposition 1 :

- Pour tout réel x, $e^x > 0$.
- Pour tout réel x et pour tout réel $y > 0$, on a : $ye = e^x \iff x = \ln(y)$
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$

Remarque : On a :

$$\ln(1) = 0 \iff e^0 = 1$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ léquation suivante :

- $e^x = 1$
  $e^x = 1 \iff x = \ln(1) \iff x = 0$
- $e^{2t-1} = 1$
  $e^{2t-1} = 1 \iff 2t - 1 = \ln(1) = 0 \iff 2t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$
- $\ln(x) = 2$
  $\ln(x) = 2 \iff x = e^2$
- $\ln(3x) = \dfrac{1}{2}$
  $\ln(3x) = \frac{1}{2} \iff 3x = e^{\frac{1}{2}} \iff x = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}$

1.2. Propriétés algébriques

Proposition 2 :

Pour tous réels a et b,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

Comme pour la fonction logarithme népérien, on peut tirer plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale de la fonction exponentielle :

Proposition 3 :

- Pour tout réel a, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- Pour tous réel a et b, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Pour tout réel a et pour tout entier relatif n, $e^{na} = (e^a)^n$

Preuve.

- On a :

$$e^a \times e^{-a} = e^0 = 1 \text{ donc } e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

- On a

$$e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$$

- On a

$$e^{na} = \exp\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{e^a \times e^a \times \ldots e^a}_{n \text{ fois}} = (e^a)^n$$

□

Exemple : Soient x et y deux réels. Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

1. $\dfrac{e^{2x}}{e^x}$
   $= e^{2x-x} = e^x$
2. $\dfrac{(e^x)^2}{e^x}$
   $= \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$
3. $\dfrac{e^x}{e^{-x}}$
   $= e^{x+x} = e^{2x}$
4. $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2$
   $= e^{6x} \times e^{-2x} = e^{6x-2x} = e^{4x}$
5. $e^0 \times e^{-x} \times (e^x)^2$
   $= 1 \times e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$
6. $\dfrac{e^x}{e^y} \times e^{y-x}$
   $= e^{x-y} \times e^{y-x} = e^{x-y+y-x} = e^0 = 1$

2. ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

2.1. Dérivée et sens de variation

Proposition 4 :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(exp(x)\right)' = exp(x)$.

Preuve. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(\exp(x))$.
On a $f'(x) = \dfrac{(\exp(x))'}{\exp(x)}$.
Mais on sait par ailleurs que $\ln(\exp(x)) = x$ et que donc $f(x) = x$. Donc, on a également $f'(x) = 1$. Ainsi,

$$1 = \frac{(\exp(x))'}{\exp(x)} \text{ et donc } (\exp(x))' = \exp(x)$$

□

Proposition 5 :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Pour tout réel x, on a $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$. Donc, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes :

Proposition 6 :

Pour tous réels a et b :
- $e^a = e^b$ si, et seulement si, $a = b$
- $e^a > e^b$ si, et seulement si, $a = b$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

   On a $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1} \iff e^{3x+5-3+2x} = e^{2x^2-1} \iff e^{5x+2} = e^{2x^2-1} \iff 5x+2 = 2x^2-1 \iff 2x^2-5x+1 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4\times 2\times 1 = 25-8 = 17$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{4}$$

2. $e^{x^2+x-1} = 1$
On a $e^{x^2+x-1} = 1 \iff e^{x^2+x-1} = e^0 \iff x^2 + x - 1 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3. $e^{2x} \leqslant e^x$
On a $e^{2x} \leqslant e^x \iff 2x \leqslant x \iff x \leqslant 0$. Donc,

$$\mathscr{S} =]-\infty; 0]$$

4. $e^{2x}e^{x^2} < 1$
On a $e2xe^{x^2} < 1 \iff e^{2x+x^2} < e^0 \iff 2x + x^2 < 0$. Les racines de ce polynôme de degré 2 sont 0 et -2. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc,

$$\mathscr{S} =]-2; 0[$$

2.2. Limites

Proposition 7 :

La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Proposition 8 :

La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe d'équation $y = e^x$ en $-\infty$.

Exemple : Calculer

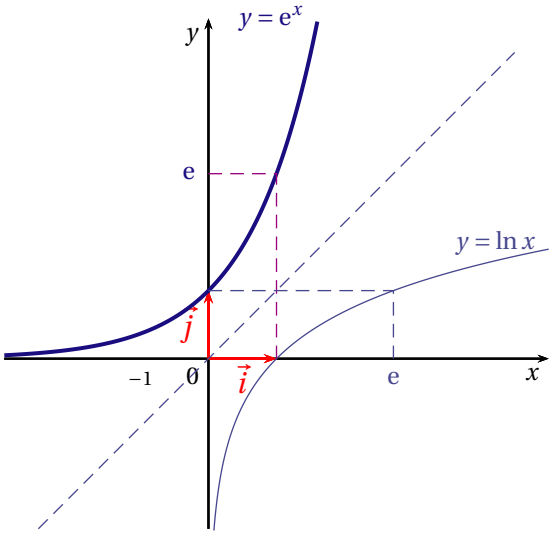
$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} e^X = 1$. Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

- On a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$. Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 0^-} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} e^X = +\infty$. Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

2.3. Courbe représentative

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.
- La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
  Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



2.4. Croissance comparée

Proposition 9 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

En particulier, lorsque $n = 1$

$$\lim_{x\to -\infty} x e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Remarque : Ces limites sont des formes indéterminées. Pour lever de telles formes indéterminées, on applique les résultats de croissance comparée.
On retient que l'exponentielle « l'emporte » sur les puissances de x.

Exemple :

- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x - x = +\infty$

3. Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$

Proposition 10 :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

On note en abrégé

$$(e^u)' = u'e^u$$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3-4x^2+2x-3}$. Calculer $f'(x)$.
Posons $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$. On a $u'(x) = 3x^2 - 8x + 2$. Donc,

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (3x^2 - 8x + 2)e^{x^3-4x^2+2x-3}$$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   On a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{\mathrm{X}\to-\infty} e^{\mathrm{X}} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par composition} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x^3-15x^2+26x-25} = 0\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + -\infty \\ \lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} e^{\mathrm{X}} = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par composition} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x^3-15x^2+26x-25} = +\infty\end{array}$$

2. Étudier les variations de la fonction f.
   Posons $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25$. Alors, $u'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$. Donc,

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 6(x^2 - 5x + 6)e^{2x^3-15x^2+36x-25}$$

   Une exponentielle est toujours positive. Il ne nous reste donc qu'à étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

   On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et ainsi le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$6(x^2-5x+6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$e^{2x^3-15x^2+36x-25}$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

4. Exercices

13.1 Simplifier les écritures suivantes :

$A = (e^x)^2 - \dfrac{1}{e^{-2x}}$; $B = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$; $C = e^{-x}\left(e^{2x} - \dfrac{1}{e^x}\right)$; $D = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}$.

$E = \dfrac{\left(e^{x+2}\right)^2}{e^{2x-1}}$; $F = \ln\left(e^{2x+1} \times e^{2-x}\right)$; $G = \dfrac{e^{2x+\ln 2}}{e^{-x}}$; $H = \dfrac{e^{x+\ln 8}}{e^{x-\ln 2}}$.

13.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{x^2+x-1} = 1$
2. $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$
3. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$
4. $\ln\left(e^{x+1}\right) = e^{x+1} + x$
5. $e^{\ln(x^2+1)} - \ln\left(e^{1-x^2}\right) = \dfrac{1}{2}$
6. $\ln(e^{-x}) + e^{-\ln x} = 0$

13.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{\frac{1}{x}} \geqslant e$
2. $e^{2x} \leqslant e^x$
3. $e^{2x}e^{x^2} < 1$
4. $e^{x^2-10x+21} \geqslant 1$

13.4 Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$:

1. $f(x) = e^{2x} - 1$
2. $f(x) = xe^x - 2$
3. $f(x) = 4 - 2x + e^x$
4. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$
5. $f(x) = e^{-x}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1 - 3e^x$
7. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x^2 - x}$
8. $f(x) = \exp\left(\dfrac{2x+1}{x+3}\right)$
9. $f(x) = e^{x^2-3x+1}$
10. $f(x) = (1-2x)e^x$
11. $f(x) = x + 1 + xe^x$
12. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

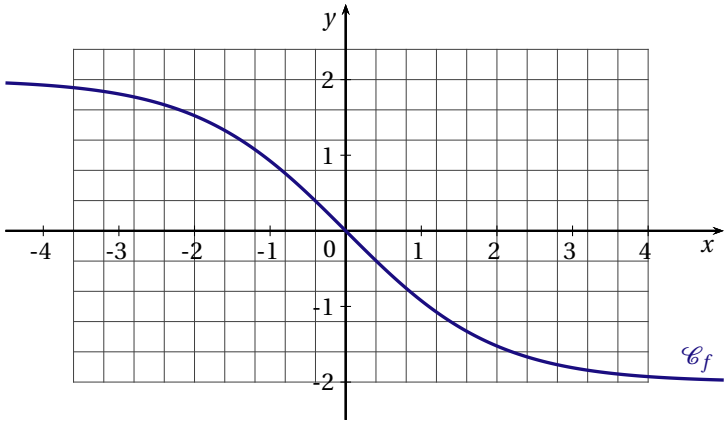
13.5 Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x}$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{e^x - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$

13.6 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} - (\mathrm{e}^x)^2$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{1-x}}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \times \mathrm{e}^{x^2-2x+1}$

13.7 On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^x} - 2$.



1. **a.** Calculer $f(-\ln 7)$ et $f(\ln 3)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
3. **a.** On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b. Ètudier les variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\ln 3$.

13.8 Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. On note f' la dérivée de la fonction f.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$.

13.9 Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{3-2x}{\mathrm{e}^x}$.

1. **a.** Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = (2x-5) \times \mathrm{e}^{-x}$.
   b. Ètudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

13.10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4-x)\mathrm{e}^x - 2$.

1. **a.** Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b. La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b. Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

13.11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4e^x}{1+e^x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.
2. Montrer que $f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-x}}$, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.
3. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation.
4. On appelle (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de (T).
5. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - (x+2)$.
   a. Vérifier que $d'(x) = \dfrac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ et en déduire les variations de d.
   b. Calculer $d(0)$ puis étudier le signe de $d(x)$.
   c. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (T).
6. Tracer les asymptotes trouvées à la question 2, la tangente en 0, et la courbe $\mathscr{C}_f$.

13.12 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - 1 + x$$

1. **a.** Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$$
   On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
2. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   c. Justifier que :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
3. **a.** Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation :
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$
   b. Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées à la question **2**.
4. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel x, la relation :
   $$f''(x) = \frac{2-x}{e^x}$$
   Étudier la convexité de f.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

5. Table des matières

1 Fonction exponentielle **2**
1.1 Définition et premières propriétés 2
1.2 Propriétés algébriques 3

2 Étude de la fonction exponentielle **4**
2.1 Dérivée et sens de variation 4
2.2 Limites 5
2.3 Courbe représentative 6
2.4 Croissance comparée 6

3 Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$ **7**

4 Exercices **8**