FONCTIONS EXPONENTIELLES
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $e^{3x+2}=e$ 2) $e^x-7=0$ 3) $e^{2x}-9=0$

4) $e^x+1=0$ 5) $e^x\left(e^x-4\right)=0$ 6) $e^{2x}+e^x-6=0$

7) $\ln(e^x-3)=0$ 8) $e^{1-2\ln x}=1$ 9) $\ln e^{x+1}=1$

Exercice n°2.

1) Déterminer les racines du polynôme $P(X)=X^2+4X-5$
2) En déduire les solutions de l'équation $e^{2x}+4e^x=5$
3) Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{2x}+e^x-2=0$ b) $e^{2x+1}+e^{x+1}-2e=0$ c) $e^x-2e^{-x}+1=0$

Exercice n°3. **- Equations mêlant logarithmes et exponentielles**

1) Développer l'expression : $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

2) Résoudre les équations suivantes : (a) $e^{3x}-2e^{2x}-e^x+2=0$ (b) $e^{x^3+2}=e^{2x^2+x}$

Exercice n°4. Résoudre les systèmes d'équations suivant :

1) $\begin{cases} e^x+e^y=5 \\ e^x-e^y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} e^x+2e^y=3 \\ x+y=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=-15 \\ e^xe^y=e^{-2} \end{cases}$

Exercice n°5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$e^{3x+2}\le e$ $e^x-7<0$ $e^{2x}-9\ge 0$

$e^x+1>0$ $e^x\left(e^x-4\right)<0$ $e^{2x}+e^x-6\le 0$

Exercice n°6. A l'aide de polynômes bien choisis, résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^{2x}+e^x-2\ge 0$ 2) $e^{2x}-3e^x+2\le 0$ 3) $e^x-e^{-x}>0$

Exercice n°7. Le nombre d'habitants d'une région ayant un fort taux de natalité est donné par la fonction exponentielle $f:t\to 12e^{0,05t}$ où $f(t)$ est la population exprimée en millions d'habitants pour l'année 2000+t

1) A partir de quelle date la population aura-t-elle plus que triplé ?
2) Cette région ne peut pas nourrir plus de vingt millions de personnes. Pendant combien d'années après 1990 la nourriture sera-t-elle suffisante ?

Exercice n°8. Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+4e^x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-3e^x\right)$

Exercice n°9. Etudiez les limites de la fonction f donnée aux bornes de son ensemble de définition D, et trouver les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

1) $f(x)=e^{-x}-4$ 2) $f(x)=\dfrac{3}{1+e^x}$ 3) $f(x)=x-2+xe^x$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$

Exercice n°10.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

2) Montrer que $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, et calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) En déduire l'existence de deux asymptotes de la courbe C.

Exercice n°11. Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilités et les fonctions dérivées de chacune des fonctions proposées :

1) $f(x)=x+3-e^x$ 2) $f(x)=xe^x$ 3) $f(x)=(2x+1)e^x$ 4) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

5) $f(x)=e^{-x}$ 6) $f(x)=3e^{2x}-5e^x$ 7) $f(x)=e^{3x+5}$ 8) $f(x)=e^{-x^2+1}$

9) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ 10) $f(x)=x^2e^{-2x}$ 11) $f(x)=\ln(e^x+1)$ 12) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Exercice n°12.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2e^{1-x}$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Quelle conséquence graphique pour C peut-on en tirer ?
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'
3) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe C.

Exercice n°13.

Soient f et g définies par : $f(x)=e^x+e^{-x}$ et $g(x)=e^x-e^{-x}$

1) Déterminer les domaines de définitions de f et g ainsi que leur parité éventuelle.
2) Déterminer les limiets aux bornes du domaines d'étude de chacune des fonctions f et g.
3) Déterminer les dérivées des fonctions f et g. ; en déduire leur tableau de variations.
4) Calculer, a étant un réel quelconque : $[f(a)]^2-[g(a)]^2$
5) Exprimer pour a et $b$deux réels, en fonction de $g(a+b)$: $f(a)g(b)+g(a)f(b)$

Exercice n°14.

1) Développer $(x-1)(x^2+2x-8)$.
2) Factoriser en produit de polynômes du premier degré $x^3+x^2-10x+8$
3) Soit f la fonction définie pour x différent de $\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$ par $f(x)=\dfrac{e^{3x+1}+e^{2x+1}}{5e^x-4}$

Donner la limite de f en moins l'infini.
4) Résoudre l'équation $f(x)=2e$.
5) Soit Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. Donner une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 0.

Exercice n°15. Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=\dfrac{1}{4}e^x$ sur $\mathbb{R}$ 2) $f(x)=e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ 3) $f(x)=e^{2x+3}$ sur $\mathbb{R}$

4) $f(x)=xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ 5) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice n°16. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(x+2)e^x$

Déterminez les nombres a et b tels que la fonction F, définie sur IR, par $F(x)=(ax+b)e^x$ soit une primitive de f.

Exercice n°17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3}{e^{-x}+1}$

1) Vérifiez que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}$
2) Déduisez en la primitive F de f qui s'annule pour x=0

Exercice n°18.

Calculez les intégrales suivantes :

1) $\int_{2}^{5} e^{x}dx$ 2) $\int_{2}^{5} -e^{-x}dx$ 3) $\int_{0}^{2} 2e^{2x-1}dx$ 4) $\int_{2}^{1} \left(e^{2t}+2e^{t}-3\right)dt$

5) $\int_{-1}^{1} e^{3x+1}dx$ 6) $\int_{0}^{1} \frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx$ 7) $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^{x}\left(e^{x}-3\right)dx$ 8) $\int_{0}^{1} \frac{e^{-x}-2}{e^{x}}dx$

Exercice n°19.

Calculez l'intégrale $I=\int_{0}^{1} \frac{1}{e^{x}+1}dx$ (indication : $\frac{1}{e^{x}+1}=1-\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$)

Exercice n°20.

Calculez l'intégrale I en utilisant la formule d'intégration par parties:

1) $I=\int_{-1}^{0} xe^{x}dx$ 2) $I=\int_{-1}^{0} (x+2)e^{x}dx$ 3) $I=\int_{-1}^{0} (x+2)e^{x+1}dx$

Exercice n°21.

Calculez l'intégrale I en utilisant deux fois le théorème de l'intégration par parties:

1) $I=\int_{0}^{\pi} e^{x}\sin x dx$ 2) $I=\int_{0}^{\pi} e^{2x}\cos x dx$

Exercice n°22.

L'atmosphère terrestre contient de l'azote qui est transformé sous l'effet du rayonnement cosmique, en carbone 14, radioactif, noté ^{14}C. Les êtres vivants contiennent donc du ^{14}C qui est renouvelé constamment. A leur mort, il n'y a plus d'emprunt de ^{14}C à l'extérieur et le carbone ^{14}C qu'ils contiennent se désintègre. Le temps écoulé depuis la mort d'un être peut donc être évalué en mesurant la proportion de ^{14}C qui lui reste.

Soit $N(t)$ le nombre d'atomes de ^{14}C existant à l'instant t, exprimé en années, dans un échantillon de matière organique ;

On montre que $N'(t)=-0{,}0001238N(t)$

La vitesse de désintégration est donc proportionnelle au nombre d'atomes présents.

1) En appelant N_0 le nombre d'atomes de ^{14}C initial, démontrer que $N(t)=N_0e^{-0{,}0001238t}$

2) Quel est le pourcentage d'atomes de carbone perdus au bout de 20 000 ans ?

3) On appelle période (ou demi-vie) du carbone ^{14}C, le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, la période du ^{14}C (à 1 an près)

4) On analyse des fragments d'os trouvés dans une grotte.

On constate qu'ils ont perdu 30 % de leur teneur en carbone.

Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, l'âge du fragment d'os.

FONCTIONS EXPONENTIELLES
CORRECTION

Ces équations reposent sur deux règles qui traduisent la **BIJECTIVITE** des fonctions logarithme et exponentielle :
Soient *a* et *b* deux nombres strictement positifs. Alors $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
Soient *a* et *b* deux nombres quelconques. Alors $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
On utilise, en outre, de nombreuses propriétés algébriques de ces deux fonctions

Exercice n°1

1) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x+2} = e \Leftrightarrow e^{3x+2} = e^1 \Leftrightarrow 3x+2 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. $\boxed{S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}}$

2) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$e^x = 7 \Leftrightarrow e^x = e^{\ln(7)} \Leftrightarrow x = \ln(7)$. car pour tout *a*>0, $e^{\ln(a)} = a$. Ainsi $\boxed{S = \{\ln 7\}}$

Une autre manière de le rédiger aurait pu être : $e^x = 7 \Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln(7) \Leftrightarrow x = \ln(7)$. $S = \{\ln 7\}$

3) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$e^{2x} - 9 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln(9) \Leftrightarrow 2x = \ln(9) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(9) = \ln(3)$. $\boxed{S = \{\ln 3\}}$

4) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$ impossible car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
Ainsi $\boxed{S = \varnothing}$
Une autre manière de le rédiger aurait pu être :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 1 > 0$, donc ne peut être égal = -1, donc $S = \varnothing$
5) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x\left(e^x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ ou $e^x - 4 = 0$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ (donc $\neq 0$), l 'équation est équivalente à $e^x - 4 = 0$, donc $x = \ln 4 = 2\ln 2$, donc $\boxed{S = \{2\ln 2\}}$

6) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.
En posant $X = e^x$, puisque $e^{2x} = \left(e^x\right)^2 = X^2$, l'équation devient équivalente à $X^2 + X - 6 = 0$, que l'on a résolu précédemment : $X = 2$ ou $X = -3$. En revenant à la variable *x* on a :
$X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$
$X = -3 \Leftrightarrow e^x = -3$ impossible, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
Finalement, $\boxed{S = \{\ln 2\}}$

Exercice n°2

1) On détermine les racines du polynôme P défini par $P(X) = X^2 + 4X - 5$ en calculant son discriminant :
$\Delta = 4^2 - 4\times1\times(-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2$ d'où l'existence de deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{2\times1} = \frac{-4-6}{2} = -5 \text{ et } X_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{2\times1} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

2) Si on pose $X = e^x$, alors $X^2 = \left(e^x\right)^2 = e^{2x}$, de sorte que l'équation $e^{2x} + 4e^x = 5$ devient équivalente à $X^2 + 4X = 5 \Leftrightarrow X^2 + 4X - 5 = 0$, équation qui a été résolue dans la question 1) : On a trouvé $X_1 = -5$ et $X_2 = 1$
On revient à l'inconnue *x* en résolvant :
$X_1 = -5 \Leftrightarrow e^x = -5$ équation qui n'admet pas de solution réelle, et $X_2 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi $\boxed{S = \{0\}}$

3) a) Pour résoudre l'équation $e^{2x} + e^x - 2 = 0$, on pose $X = e^x$, et on se retrouve avec l'équation $X^2 + X - 2 = 0$ équation dont le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4\times1\times(-2) = 9$, donc qui admet deux solutions réelles distinctes

$X_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times1} = \frac{-4}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$. On revient à l'inconnue *x* en résolvant :
$X_1 = -2 \Leftrightarrow e^x = -2$ équation qui n'admet pas de solution réelle, et $X_2 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi $\boxed{S = \{0\}}$

b) En transformant l'écriture du membre de gauche, l'équation $e^{2x+1}+e^{x+1}-2e=0$ se réécrit $e\times e^{2x}+e\times e^{x}-2e=0$, donc après division par $e\neq 0$, est équivalente à $e^{2x}+e^{x}-2=0$, équation que l'on a déjà résolu. On retrouve $\boxed{S=\{0\}}$

c) En multipliant les deux membres de l'équation $e^{x}-2e^{-x}+1=0$ par e^{x} qui est non nul, l'équation $e^{x}-2e^{-x}+1=0$ devient équivalente à $e^{x}\left(e^{x}-2e^{-x}+1\right)=0\times e^{x}\Leftrightarrow e^{2x}-2e^{x}e^{-x}+e^{x}=0\Leftrightarrow e^{2x}+e^{x}-2=0$

Exercice n°3

1) $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)=\left(x^2-1\right)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$

2) (a) On pose $X=e^{x}$. L'équation $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}+2=0\Leftrightarrow\left(e^{x}\right)^3-2\left(e^{x}\right)^2-e^{x}+2=0$ devient alors équivalente à $X^3-2X^2-X+2=0\Leftrightarrow(X-1)(X+1)(X-2)=0$ (d'après la factorisation de la question (1))

Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit qu'au moins l'un d'entre eux le soit.

Ainsi $(X-1)(X+1)(X-2)=0\Leftrightarrow X=1$ ou $X=-1$ ou $X=2$. En « revenant » à l'inconnue x, on a donc $e^{x}=1$ ou $e^{x}=-1$ ou $e^{x}=2$. Puisque pour tout réel x, $e^{x}>0$, l'équation $e^{x}=-1$ n'admet pas de solutions réelle. En revanche $e^{x}=1\Leftrightarrow x=0$ et $e^{x}=2\Leftrightarrow x=\ln 2$. Ainsi $\boxed{S_a=\{0;\ln 2\}}$

(b) Par bijectivité de la fonction exponentielle, $e^{x^3+2}=e^{2x^2+x}\Leftrightarrow x^3+2=2x^2+x\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$

D'après la factorisation de la question (1), $x^3-2x^2-x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)(x-2)=0$. Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit qu'au moins l'un d'entre eux le soit.

Ainsi $(x-1)(x+1)(x-2)=0\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ ou $x=2$. Donc $\boxed{S_b=\{-1;1;2\}}$

Exercice n°4

1) En posant $X=e^{x}$ et $Y=e^{y}$, le système $\begin{cases}e^{x}+e^{y}=5\\ e^{x}-e^{y}=3\end{cases}$ devient équivalent à

$$\begin{cases}X+Y=5 & L_1\\ X-Y=3 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y=5-X & L_1\\ 2X=8 & L_2+L_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y=5-4=1 & L_1\\ X=4 & L_2+L_1\end{cases}.$$

On revient aux inconnues x et y en résolvant : $X=4\Leftrightarrow e^{x}=4\Leftrightarrow x=\ln 4$ et $Y=1\Leftrightarrow e^{y}=1\Leftrightarrow y=\ln 1=0$

Le système admet donc pour solution $\boxed{S=\{\ln 4;0\}}$

2) En posant $X=e^{x}$ et $Y=e^{y}$, le système $\begin{cases}e^{x}+2e^{y}=3\\ x+y=0\end{cases}$ devient équivalent à

$$\begin{cases}X+2Y=3 & L_1\\ X+Y=0 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y=3 & L_1-L_2\\ X=-Y & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y=3 & L_1-L_2\\ X=-3 & L_2\end{cases}.$$

On revient aux inconnues x et y en résolvant : $X=-3\Leftrightarrow e^{x}=-3$ qui n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Le système n'admet donc pas de solution réelle.

3) Puisque $e^{x}e^{y}=e^{x+y}$, on aura $e^{x}e^{y}=e^{-2}\Leftrightarrow x+y=-2$. Le système $\begin{cases}xy=-15\\ e^{x}e^{y}=e^{-2}\end{cases}$ est donc équivalent au système

$$\begin{cases}xy=-15 & L_1\\ x+y=-2 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(-2-x)=-15 & L_1\\ y=-2-x & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2-2x=-15 & L_1\\ y=-2-x & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-15=0 & L_1\\ y=-2-x & L_2\end{cases}$$

On résout l'équation $x^2+2x-15=0$ en calculant son discriminant :

$\Delta=2^2-4\times1\times(-15)=64$, donc l'équation $x^2+2x-15=0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{64}}{2\times1}=-5$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{64}}{2\times1}=3$. Si $x_1=-5$, alors $y_1=-2-x_1=-2-(-5)=3$.

Si $x_2=3$ alors $y_2=-2-x_2=-2-3=-5$. Les solutions du système $\begin{cases}xy=-15\\ e^{x}e^{y}=e^{-2}\end{cases}$ sont donc $\boxed{S=\{(-5;3);(3;-5)\}}$.

Puisqu'elles jouent des rôles symétriques on peut affirmer que les deux nombres cherchés sont –5 et 3

Exercice n°5

Ces inéquations reposent sur deux règles qui traduisent la **STRICTE CROISSANCE** des fonctions logarithme et exponentielle : Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

Soient a et b deux nombres quelconques. Alors $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

On utilise, en outre, de nombreuses propriétés algébriques de ces deux fonctions

1) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x+2} \leq e \Leftrightarrow e^{3x+2} \leq e^1 \Leftrightarrow 3x+2 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3}$. Ainsi $\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right]}$

2) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$e^x < 7 \Leftrightarrow e^x < e^{\ln(7)} \Leftrightarrow x < \ln(7)$. car pour tout a>0, $e^{\ln(a)} = a$. Ainsi $\boxed{S =]-\infty; \ln 7[}$

Une autre manière de le rédiger aurait pu être :

$e^x < 7 \Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) < \ln(7) \Leftrightarrow x < \ln(7)$. $S =]-\infty; \ln 7[$

3) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$e^{2x} - 9 \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) \geq \ln(9) \Leftrightarrow 2x \geq \ln(9)$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}\ln(9) = \ln(3)$. $S = [\ln 3; +\infty[$

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 1 > 0$, donc $\boxed{S = \mathbb{R}}$

5) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$,

$e^x\left(e^x - 4\right) < 0 \Leftrightarrow e^x - 4 < 0 \Leftrightarrow e^x < 4 \Leftrightarrow x < \ln 4 = 2\ln 2$. $\boxed{S =]-\infty; 2\ln 2[}$

6) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

En posant $X = e^x$, puisque $e^{2x} = \left(e^x\right)^2 = X^2$, l'inéquation devient équivalente à $X^2 + X - 6 \leq 0$, que l'on a résolu précédemment : $X \in [-3; 2]$

En revenant à la variable x on a : $X \in [-3; 2] \Leftrightarrow -3 \leq e^x \leq 2$, qui se décompose en deux inéquations : $-3 \leq e^x$ et $e^x \leq 2$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, l'inéquation $-3 \leq e^x$ a pour ensemble de solutions $S_1 = \mathbb{R}$. De plus $e^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$.

Cette deuxième inéquation a pour ensemble de solutions $S_2 =]-\infty; \ln 2]$

Finalement, $S = S_1 \cap S_2 = \mathbb{R} \cap]-\infty; \ln 2] = \boxed{]-\infty; \ln 2]}$

Exercice n°6

1) Pour résoudre l'inéquation $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$, on pose $X = e^x$, et on se retrouve avec l'inéquation $X^2 + X - 2 \geq 0$

On calcule le discriminant du polynôme $P(X) = X^2 + X - 2$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$. Il admet donc deux racines réelles distinctes $X_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-4}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$. Ainsi $X^2 + X - 2 \geq 0$ si et seulement si $P(X) \geq 0$ donc si et seulement si $X \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$. On revient à l'inconnue x en résolvant :

$X \in]-\infty; -2] \Leftrightarrow X \leq -2 \Leftrightarrow e^x \leq -2$, qui n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

$X \in [1; +\infty[\Leftrightarrow X \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. Ainsi $\boxed{S = [0; +\infty[}$

2) Pour résoudre l'inéquation $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$, on pose $X = e^x$, et on se retrouve avec l'inéquation $X^2 - 3X + 2 \geq 0$

On calcule le discriminant du polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$: $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$. Il admet donc deux racines réelles distinctes $X_1 = \frac{3-\sqrt{1}}{2\times 1} = 1$ et $X_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2\times 1} = 2$. Ainsi $X^2 - 3X + 2 \geq 0$ si et seulement si $P(X) \geq 0$ donc si et seulement si $X \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$. On revient à l'inconnue x en résolvant :

$X \in]-\infty; 1] \Leftrightarrow X \leq 1 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ et $X \in [2; +\infty[\Leftrightarrow X \geq 2 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$.

Ainsi $\boxed{S =]-\infty; 1] \cup [\ln 2; +\infty[}$

3) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, l'inéquation $e^x - e^{-x} > 0$ est équivalente, par multiplication par e^x, à l'inéquation $e^x\left(e^x - e^{-x}\right) > 0 \times e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Ainsi $\boxed{S =]0; +\infty[}$

Exercice n°7

1) En 2000, la population de la région s'élève à $f(0)=12e^{0,05\times 0}=12e^{0}=12$ millions d'habitants.

La population aura plus que triplé pour les valeurs de t telles que $f(t)\geq 36 \Leftrightarrow 12e^{0,05t}\geq 36 \Leftrightarrow e^{0,05t}\geq 3$. Par bijectivité de la fonction logarithme népérien, on obtient $e^{0,05t}\geq 3 \Leftrightarrow \ln\left(e^{0,05t}\right)\geq \ln(3) \Leftrightarrow 0,05t\geq \ln(3) \Leftrightarrow t\geq \dfrac{\ln(3)}{0,05}$

Puisque $\dfrac{\ln(3)}{0,05}\approx 21,97$ à 0,01 près, on peut affirmer que la population aura plus que triplé pour $t\geq 22$, soit à partir de l'année 2000+22=2022

2) La nourriture sera suffisante tant que $f(t)\leq 20 \Leftrightarrow 12e^{0,05t}\leq 20 \Leftrightarrow e^{0,05t}\leq \dfrac{5}{3}$. Par bijectivité de la fonction logarithme népérien, on obtient $e^{0,05t}\leq \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \ln\left(e^{0,05t}\right)\leq \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \Leftrightarrow 0,05t\leq \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \Leftrightarrow t\leq \dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{0,05}$. Puisque $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{0,05}\approx 10,2$ à 0,1 près, on peut affirmer que la nourriture sera suffisante tant que $t\leq 10$, soit jusqu'en 2000+10=2010

Exercice n°8

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x=0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$), donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+4e^x\right)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x=+\infty$, donc par soustraction, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3e^x\right)=-\infty$

Exercice n°9

1) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ ($\lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$ où on a posé $u=-x$), on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-4$ donc la droite d'équation $y=-4$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, on déduit, par somme et quotient, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$, donc la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, on déduit, par somme et quotient, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

3) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, alors par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty$, alors par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ (limite du cours) et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2=-\infty$, alors par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Mais comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$, on en déduit que la droite d'équation $y=x-2$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

4) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, on déduit, par différence et quotient, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, donc la droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, on déduit, par différence et quotient, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

Enfin, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x-1=0^-$ (car $x<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x-1<0$), on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{e^x-1}=-\infty$. Et puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x-1=0^+$ (car $x>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x-1>0$), on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{e^x-1}=+\infty$. La droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est donc asymptote verticale à C_f.

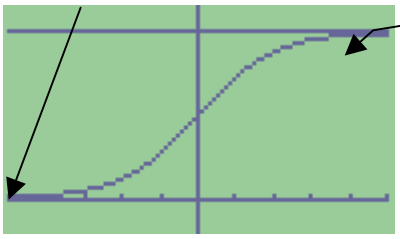
Exercice n°10

1) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on déduit, par somme et quotient, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0}{1} = 0$,

2) On transforme l'expression : Pour tout réel x, $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ ($\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$ où on a posé $u=-x$), on déduit, par somme et quotient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

3) La courbe admet donc deux asymptotes horizontales :

La droite d'équation $y=0$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y=1$ en $+\infty$



Exercice n°11

1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 1-e^x}$

2) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont.
Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$, on aura $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1\times e^x + x\times e^x \boxed{= (1+x)\times e^x}$

3) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont.
Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 2x+1 \Rightarrow u'(x) = 2$ et $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$, on aura $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2\times e^x + (2x+1)\times e^x \boxed{= (2x+3)\times e^x}$

4) La fonction f est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s 'annulant pas sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Puisque pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$ et $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$, on aura $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{e^x x - e^x\times 1}{x^2} \boxed{= \frac{e^x(x-1)}{x^2}}$

5) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont.
En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = e^{u(x)}$ où $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = -1$, donc $\boxed{f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -e^{-x}}$

6) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et sommes de fonctions qui le sont.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = 3e^{u(x)} - 5e^x$ où $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$ donc $f'(x) = 3u'(x)e^{u(x)} - 5e^x$ c'est-à-dire pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 6e^{2x} - 5e^x}$

7) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont.
En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = e^{u(x)}$ où $u(x) = 3x+5 \Rightarrow u'(x) = 3$, donc $\boxed{f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 3e^{3x+5}}$

8) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont.
En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = e^{u(x)}$ où $u(x) = -x^2+1 \Rightarrow u'(x) = -2x$, donc $\boxed{f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -2xe^{-x^2+1}}$

9) La fonction *f* est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions qui le sont.

En effet, $f(x)=e^{u(x)}$ où $u(x)=\sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $]0;+\infty[$, avec $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$. Ainsi

$$\boxed{f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}$$

10) La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions qui le sont.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=x^2\Rightarrow u'(x)=2x$ et $v(x)=e^{-2x}=e^{w(x)}\Rightarrow v'(x)=w'(x)e^{w(x)}=-2e^{-2x}$.

Ainsi $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=2x\times e^{-2x}+x^2\times(-2)e^{-2x}\boxed{=2x(1-x)\times e^{-2x}}$

11) Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x+1>0$ et que la fonction $X\to\ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, la fonction *f* sera définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=e^x+1\Rightarrow u'(x)=e^x$, donc

$$\boxed{f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{e^x}{e^x+1}}$$

12) Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x+e^{-x}>0$, la fonction *f* sera définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions que le sont, le dénominateur ne s'annulant . Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=e^x-e^{-x}\Rightarrow u'(x)=e^x-(-1)e^{-x}=e^x+e^{-x}$ et $v(x)=e^x+e^{-x}\Rightarrow v'(x)=e^x+(-1)e^{-x}=e^x-e^{-x}$, donc

$$f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x}))}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{2e^x\times 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\boxed{=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}$$

<u>Exercice n°12</u>

1) D'une part $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}1-x=+\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$ (car $\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$)

Par produit, on en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$

Pour tout réel *x* , on écrit $f(x)=x^2e^{1-x}=x^2e\times e^{-x}=e\times\dfrac{x^2}{e^x}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ (limite du cours bien connue, dite « de croissance comparée »), on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$, donc par suite, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$. On en déduit que la droite d'équation *y*=0 (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe *C* en $+\infty$

2) *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions qui le sont, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=u(x)\times v(x)$ où $u(x)=x^2\Rightarrow u'(x)=2x$ et $v(x)=e^{1-x}\Rightarrow v'(x)=-e^{1-x}$, on calcule : Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)=2xe^{1-x}+x^2(-e^{1-x})=e^{1-x}(2x-x^2)\boxed{=x(2-x)e^{1-x}}$$

Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{1-x}>0$, $f'(x)$ aura le même signe que $x(2-x)$, expression du second degré factorisée, dont les racines sont *x*=0 et *x*=2. D'après la règle des signes d'un trinôme du second degré, $x(2-x)<0$ si et seulement si $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ (« à l'extérieur des racines ») et $x(2-x)>0$ si et seulement si $x\in]0;2[$

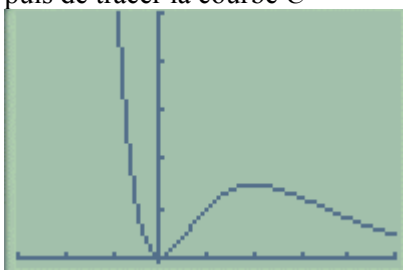
La fonction *f* est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, strictement croissante sur sur [0 ;2], et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

3) On calcule $f(0)=0^2e^{1-0}=0$ et $f(2)=2^2e^{1-2}=\frac{4}{e}$, ce qui permet

de dresser le tableau de variations de f ….

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(2)=\frac{4}{e}$	↘	0

puis de tracer la courbe C



Exercice n°13

1) La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, il en sera de même pour les fonctions f et g.

De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=e^{-x}+e^{-(-x)}=e^{-x}+e^{x}=f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.

De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(-x)=e^{-x}-e^{-(-x)}=e^{-x}-e^{x}=-\left(e^{x}-e^{-x}\right)=-g(x)$ donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$ (où on a posé $u=-x$), on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$ (où on a posé $u=-x$), on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty}$

3) La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, il en sera de même pour les fonctions f et g.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $\boxed{f'(x)=e^{x}+(-1)e^{-x}=g(x)}$ et $\boxed{g'(x)=e^{x}-(-1)e^{-x}=e^{x}+e^{-x}=f(x)}$

Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{x}>0$ et $e^{-x}>0$, on en conclut que $f(x)>0$, c'est-à-dire $g'(x)>0$, donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$. Puisque g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $g(0)=e^{0}-e^{-0}=1-1=0$, on en déduit que pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$, $g(x)<0$, c'est-à-dire $f'(x)<0$, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $g(x)>0$, c'est-à-dire $f'(x)>0$. $\boxed{\text{La focntion } f \text{ est donc strictement décroissante sur } \left]-\infty;0\right] \text{ et strictement croissante sur } \left[0;+\infty\right[}$

On résume dans deux tableaux de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0)=2$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

4) Pour tout réel a,

$$\left[f(a)\right]^2-\left[g(a)\right]^2=\left(e^{a}+e^{-a}\right)^2-\left(e^{a}-e^{-a}\right)^2$$

$$=\left(e^{a}\right)^2+2e^{a}e^{-a}+\left(e^{-a}\right)^2-\left(\left(e^{a}\right)^2-2e^{a}e^{-a}+\left(e^{-a}\right)^2\right)$$

$$=e^{2a}+2e^{0}+e^{-2a}-e^{2a}+2e^{0}-e^{-2a}=2+2$$

$$\boxed{=4}$$

5) Pour tous réels a et b,

$$f(a)g(b)+g(a)f(b)$$

$$=\left(e^{a}+e^{-a}\right)\left(e^{b}-e^{-b}\right)+\left(e^{a}-e^{-a}\right)\left(e^{b}+e^{-b}\right)$$

$$=e^{a}e^{b}-e^{a}e^{-b}+e^{-a}e^{b}-e^{-a}e^{-b}+e^{a}e^{b}+e^{a}e^{-b}-e^{-a}e^{b}-e^{-a}e^{-b}$$

$$=2e^{a}e^{b}-2e^{-a}e^{-b}=2\left(e^{a+b}-e^{-(a+b)}\right)$$

$$\boxed{=2g(a+b)}$$

Exercice n°14

1) Pour tout réel x, $(x-1)(x^2+2x-8)=x\times x^2+x\times 2x+x\times(-8)-1\times x^2+(-1)\times 2x+(-1)\times(-8)$
$=x^3+2x^2-8x-x^2-2x+8=x^3+x^2-10x+8$

2) Pour tout réel x, $x^3+x^2-10x+8=(x-1)(x^2+2x-8)$. On note $P(x)=x^2+2x-8$, et on calcule son discriminant : $\Delta=2^2-4\times1\times(-8)=36=6^2$. Le polynôme admet deux racines réelles distinctes $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{36}}{2\times1}=-4$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{36}}{2\times1}=2$, donc $P(x)=(x-2)(x+4)$, et par suite $x^3+x^2-10x+8=(x-1)(x-2)(x+4)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}3x+1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+1=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x+1}=0$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}5e^x-4=-4$, et par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

4) $\dfrac{e^{3x+1}+e^{2x+1}}{5e^x-4}=2e\Leftrightarrow e^{3x+1}+e^{2x+1}=2e(5e^x-4)\Leftrightarrow e(e^{3x}+e^{2x})=e(10e^x-8)$

En simplifiant par e, l'équation devient équivalente à $e^{3x}+e^{2x}-10e^x+8=0$

En posant $X=e^x$, l'équation devient équivalente à $X^3+X^2-10X+8=0$, c'est-à-dire, grâce à la factorisation de la question 2), à $(X-1)(X-2)(X+4)$. D'après la règle du produit nul, cette expression admet trois solutions $X=1$, $X=2$ et $X=-4$, soit, en revenant à la variable x, $e^x=1\Leftrightarrow x=0$, $X=2\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$ et $X=-4\Leftrightarrow e^x=-4$ impossible dans $\mathbb{R}$. L'équation $f(x)=2e$ admet donc pour ensemble de solutions $S=\{0;\ln 2\}$

5) L'équation de la tangente à C*f* au point d'abscisse 0 a pour forme $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

Le calcul de la dérivée : $f(x)=\dfrac{e^{3x+1}+e^{2x+1}}{5e^x-4}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(3e^{3x+1}+2e^{2x+1})(5e^x-4)-(e^{3x+1}+e^{2x+1})(5e^x)}{(5e^x-4)^2}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{15e^{3x+1}\times e^x+10e^{2x+1}\times e^x-12e^{3x+1}-8e^{2x+1}-5e^{3x+1}\times e^x-5e^{2x+1}\times e^x}{(5e^x-4)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{10e^{4x+1}-7e^{3x+1}-8e^{2x+1}}{(5e^x-4)^2}$$

nous fournit $f'(0)=\dfrac{10e^{4\times0+1}-7e^{3\times0+1}-8e^{2\times0+1}}{(5e^0-4)^2}=\dfrac{-5e^1}{1^2}=-5e$, et puisque $f(0)=\dfrac{e^1+e^1}{5e^0-4}=\dfrac{2e^1}{5-4}=2e$, l'équation de la tangente à C*f* au point d'abscisse 0 est $\boxed{y=-5ex+2e}$

Exercice n°15

1) $f(x)=\dfrac{1}{4}e^x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{4}e^x}$.

2) $f(x)=e^{-x}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-(-e^{-x})=-u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=-x\Rightarrow u'(x)=-1$, $\boxed{F(x)=e^{u(x)}=e^{-x}}$.

3) $f(x)=e^{2x+3}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\times2e^{2x+3}=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=2x+3\Rightarrow u'(x)=2$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}e^{u(x)}=\dfrac{1}{2}e^{2x+3}}$.

4) $f(x)=xe^{x^2}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\times 2xe^{x^2}=\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=x^2\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{u(x)}=e^{x^2}}$.

5) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x+1>0$ donc $\neq 0$) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ou $u(x)=e^x\Rightarrow u'(x)=e^x$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|e^x+1|)=\ln(e^x+1)}$ car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x+1>0$

Exercice n°16

La fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x)=(ax+b)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

F sera une primitive de f si et seulement si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a+b=2\end{cases}$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $\boxed{F(x)=(x+1)e^x}$

Exercice n°17

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{e^{-x}+1}=\frac{3\times e^x}{(e^{-x}+1)\times e^x}=\frac{3e^x}{e^{-x}\times e^x+1\times e^x}=\frac{3e^x}{1+e^x}$

2) . f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow 1+e^x>0$ donc $\neq 0$) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et en utilisant l'écriture $f(x)=\frac{3e^x}{e^x+1}=3\frac{u'(x)}{u(x)}$ ou $u(x)=e^x+1$, on obtient $\boxed{F(x)=3\ln(|u(x)|)+k=3\ln(|e^x+1|)+k=3\ln(e^x+1)+k}$ car $e^x+1>0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice n°18

1) $\int_2^5 e^x dx=\left[e^x\right]_2^5=e^5-e^2$

2) $\int_2^5 -e^{-x}dx=\int_2^5 u'(x)e^{u(x)}dx=\left[e^{u(x)}\right]_2^5=\left[e^{-x}\right]_2^5=e^{-5}-e^{-2}=\frac{1}{e^5}-\frac{1}{e^2}=\frac{e^2-e^5}{e^7}$

3) $\int_0^2 2e^{2x-1}dx=\int_0^2 u'(x)e^{u(x)}dx=\left[e^{u(x)}\right]_0^2=\left[e^{2x-1}\right]_0^2=e^3-e^{-1}=e^3-\frac{1}{e}=\frac{e^4-1}{e}$

4) $\int_2^1\left(e^{2t}+2e^t-3\right)dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}+2e^t-3t\right]_2^1=\left(\frac{1}{2}e^2+2e^1-3\right)-\left(\frac{1}{2}e^4+2e^2-6\right)=-\frac{1}{2}e^4+\frac{5}{2}e^2+2e+3$

5) $\int_{-1}^1 e^{3x+1}dx=F(1)-F(-1)$ où F est une primitive de $f(x)=e^{3x+1}=\frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$, donc $F(x)=\frac{1}{3}e^{u(x)}=\frac{1}{3}e^{3x+1}$. Ainsi $\int_{-1}^1 e^{3x+1}dx=\frac{1}{3}e^{3\times 1+1}-\frac{1}{3}e^{3\times(-1)+1}=\frac{1}{3}\left(e^4-e^{-2}\right)=\frac{1}{3}\left(e^4-\frac{1}{e^2}\right)=\frac{e^6-1}{3e^2}$

6) $\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\left[\ln(|u(x)|)\right]_0^1=\left[\ln(|e^x+1|)\right]_0^1=\left[\ln(e^x+1)\right]_0^1=\ln(e+1)-\ln(2)=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

7) $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x\left(e^x-3\right)dx=\int_1^e u'(x)u(x)dx=\left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln 10}=\left[\frac{\left(e^x-3\right)^2}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln 10}=\frac{\left(e^{\ln 10}-3\right)^2}{2}-\frac{\left(e^{\ln 3}-3\right)^2}{2}$

$=\frac{(10-3)^2}{2}=\frac{49}{2}$

8) $\int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x}dx=\int_0^1 e^{-x}\left(e^{-x}-2\right)dx=\int_0^1 -u'(x)u(x)dx=-\left[\frac{u(x)^2}{2}\right]_0^1=-\left[\frac{\left(e^{-x}-2\right)^2}{2}\right]_0^1$

$-\frac{\left(e^{-1}-2\right)^2}{2}+\frac{\left(e^0-2\right)^2}{2}=-\frac{\left(e^{-1}-2\right)^2}{2}+\frac{1}{2}$

Exercice n°19

Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$, on utilise cette dernière écriture pour calculer l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$

En effet $I=\int_0^1 1-\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 1-\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\left[x-\ln\left(\left|u(x)\right|\right)\right]_0^1=\left[x-\ln\left(\left|e^x+1\right|\right)\right]_0^1=\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1$ car pour tout $x\in[0,1]$, $e^x+1>0$. On conclut donc que $I=1-\ln\left(e^1+1\right)-\left(1-\ln\left(e^0+1\right)\right)=-\ln(e+1)+\ln 2=\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$

Exercice n°20

1) $I=\int_{-1}^0 xe^x dx=\int_{-1}^0 u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=x\Rightarrow u'(x)=1$ et $v'(x)=e^x\Rightarrow v(x)=e^x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$I=\left[u(x)v(x)\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 u'(x)v(x)dx=\left[xe^x\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 1\times e^x dx=0-(-1)e^{-1}-\left[e^x\right]_{-1}^0=\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}-1$

2) $I=\int_{-1}^0 (x+2)e^x dx=\int_{-1}^0 u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=x+2\Rightarrow u'(x)=1$ et $v'(x)=e^x\Rightarrow v(x)=e^x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$I=\left[u(x)v(x)\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 u'(x)v(x)dx=\left[(x+2)e^x\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 1\times e^x dx=2-(1)e^{-1}-\left[e^x\right]_{-1}^0=2-\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)=1$

3) $I=\int_{-1}^0 (x+2)e^{x+1}dx=\int_{-1}^0 u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=x+2\Rightarrow u'(x)=1$ et $v'(x)=e^{x+1}\Rightarrow v(x)=e^{x+1}$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$I=\left[u(x)v(x)\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 u'(x)v(x)dx=\left[(x+2)e^{x+1}\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 1\times e^{x+1}dx=2e-(1)e^1-\left[e^{x+1}\right]_{-1}^0=e-(e-1)=1$

Exercice n°21

1) $I=\int_0^\pi e^x\sin x dx=\int_0^\pi u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^x\Rightarrow u'(x)=e^x$ et $v'(x)=\sin x\Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$I=\left[u(x)v(x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi u'(x)v(x)dx=\left[-e^x\cos x\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\times(-\cos x)dx=e^\pi+1+\int_0^\pi e^x\cos x dx$

On calcule $J=\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J=\int_0^{\pi} e^x \cos x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^x \Rightarrow u'(x)=e^x$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[e^x \sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x \sin x dx=0-0-I$$

On aboutit donc à l'équation $I=e^{\pi}+1-I$ c'est-à-dire $2I=e^{\pi}+1$ et on conclut ainsi que $\boxed{I=\frac{e^{\pi}+1}{2}}$

2) $I=\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^{2x} \Rightarrow u'(x)=2e^{2x}$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[e^{2x} \sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx=0-0-\int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx$$

On calcule $J=\int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J=\int_0^{\pi} 2e^{2x} \sin x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=2e^{2x} \Rightarrow u'(x)=4e^{2x}$ et $v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[-2e^{2x} \cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 4e^{2x}(-\cos x)dx=2e^{2\pi}+2+4\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx=2e^{2\pi}+2+4I$$

On aboutit donc à l'équation $I=-2e^{2\pi}-2-4I$ c'est-à-dire $5I=-2e^{2\pi}-2$ et on conclut ainsi que $\boxed{I=-\frac{2}{5}\left(e^{2\pi}+1\right)}$

<u>Exercice n°22</u>

1) La fonction N est solution de l'équation différentielle $N'(t)=aN(t)$ avec a = -0,0001238.

D'après le cours, elle est donc de la forme $N(t)=Ce^{-0,0001238\,t}$ où C est une constante réelle.

Si on note $N_0=N(0)$, alors $N_0=N(0) \Leftrightarrow Ce^{-0,0001238\times 0}=N_0 \Leftrightarrow C=N_0$ ce qui permet de conclure que $N(t)=N_0e^{-0,0001238t}$

2) Au bout de 20000 ans le nombre d'atomes de ^{14}C restant vaut $N(20000)=N_0e^{-0,0001238\times 20000}=N_0e^{-2,476}$

La variations en pourcentages du nombre d'atomes vaut donc $\frac{N_0e^{-2,476}-N_0}{N_0}\times 100=\left(e^{-2,476}-1\right)\times 100 \approx -91,6\%$

La matière organique aura donc perdu environ 91,6 % d'atomes.

3) Il faut trouver la valeur de t pour laquelle $N(t)=\frac{1}{2}N_0$

On résout donc $N_0e^{-0,0001238\,t}=\frac{1}{2}N_0 \Leftrightarrow e^{-0,0001238\,t}=0,5 \Leftrightarrow -0,0001238t=\ln(0,5) \Leftrightarrow t=\frac{\ln(0,5)}{-0,0001238} \approx 5599$ années. La période (ou demi-vie) du carbone ^{14}C vaut donc 5599 ans

4) Puisque le fragment a perdu 30 % de sa matière originelle, il lui en reste 70 %, et il faut donc trouver la valeur de t pour laquelle $N(t)=0,7N_0$

On résout donc $N_0e^{-0,0001238\,t}=0,7N_0 \Leftrightarrow e^{-0,0001238\,t}=0,7 \Leftrightarrow -0,0001238t=\ln(0,7) \Leftrightarrow t=\frac{\ln(0,7)}{-0,0001238} \approx 2281$

Le fragment a donc un âge d'environ 2281 ans