Fiche(1)

Fonction exponentielle

Propriétés algébriques

Exercice 1

Ecrire sous la forme d'une puissance de e les expressions suivantes :

a) $\frac{e^7}{e^2}$ **b)** $\frac{(e^{-1})^4}{e}$ **c)** $(\exp(e^2))^{-3}$ **d)** $e^2\exp(-3)$ **e)** $e^{-3} \times \exp(2)$ **f)** $\exp(1) \times \exp(-2)$

Exercice 2

Ecrire plus simplement chacun des nombres suivants :

a) $\ln\left(\exp\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ **b)** $\exp(\ln(3) - 1)$ **c)** $e^{5\ln 3} - 3e^{\ln 7}$ **d)** $\frac{e^{2\ln 3}}{e^{\ln 8}}$ **e)** $\frac{e^3}{e^{4+\ln 3}}$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\exp(2x - 3) = 1$ **b)** $e^x = 2$ **c)** $e^{-2x} = -2$ **d)** $\exp(3x + 1) = e^{1-5x}$ **e)** $e^{4x+1} = 3$ **f)** $e^{2x} = e^{-x}$

Equations – Inéquations

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$ **b)** $e^{x^2-16} = 144$ **c)** $e^{(x-4)(2x-1)} = e$

d) $e^{-x} + e^x = 2$ **e)** $e^x - 5 + \frac{6}{e^x} = 0$ **f)** $2e^x(e^x - 6e^{-x}) = 5e^x$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^{3x+1} > 0$ **b)** $e^{\frac{1}{2}x+1} \leq -2$ **c)** $e^{-5x+2} < 1$ **d)** $\exp(3x + 14) > -3$ **e)** $e^{2x+2} - e^{3x-5} < 0$

Fiche(2)

Fonction exponentielle

Etude de la fonction exponentielle

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^{-2x+6}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 3}{e^x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(\sqrt{x} - 5)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - e^x + 2)$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x})$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} - 1}{3 - e^x}$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{3x} - 2e^x + 4)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x^2 - x + 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} - 3e^{2x} - 2)$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{e^x - 1}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3

1. Démontrer que : pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} = \dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

2. Utiliser l'écriture la plus adaptée pour calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

Exercice 4

Valider ou infirmer les propositions suivantes :

1. $x \mapsto \exp(x^2)$ est la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \exp(x^2)$

2. $x \mapsto -e^{-x}$ est la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x}$

3. $x \mapsto -\dfrac{1}{e^{2x}}$ est la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{e^x}$

4. $x \mapsto (3x^2 - 1)e^{x^3 - x + 1}$ est la dérivée de k définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = e^{x^3 - x + 1}$

Exercice 5

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous en précisant dans chaque cas l'ensemble de validité des calculs.

a) $f(x) = e^{-x}$ **b)** $g(x) = e^{2x} - 3e^x + 4$ **c)** $h(x) = (x + 1)e^x$ **d)** $k(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ **e)** $m(x) = \ln(3 + e^{-x})$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{2(1-x)}$.

1. Justifier les éléments contenus dans le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+		–	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\dfrac{e^2}{2}$	↘	$-\infty$

2. Tracer la courbe C dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Fonction exponentielle

Etude de fonctions

Fiche(3)

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^{-x}$ dont le tableau de variation est donné ci-contre.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	a	↘ 0

1. Justifier les renseignements consignés dans le tableau en précisant la valeur de a.

2. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 2

Partie A- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + e^{x}$.

On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

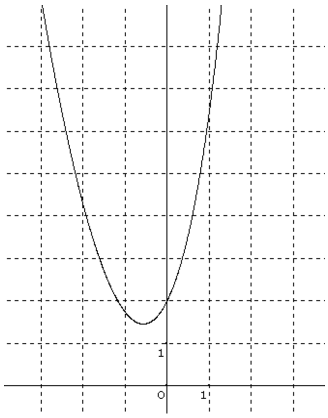
2. Etudier les variations de f.

3. Déterminer les coordonnées du point de C où la tangente T a pour coefficient directeur 3.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. Etudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

5. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$.
Préciser la position de D par rapport à C. Pour quelles valeurs de x la distance entre C et D (mesurée parallèlement à $(O ;\vec{\jmath})$), est-elle inférieure à 0,01 cm ?

6. Représenter C sur $[-3 ; 2]$, ainsi que D et T.



Partie B- La courbe Γ ci-contre représente dans un repère orthonormé la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + 2e^{x}$.

1. En utilisant ce qui précède, étudier les variations de g.
On veillera à donner, dans le tableau de variation, des valeurs exactes. On pourra poser $\beta = g(\alpha)$.

2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

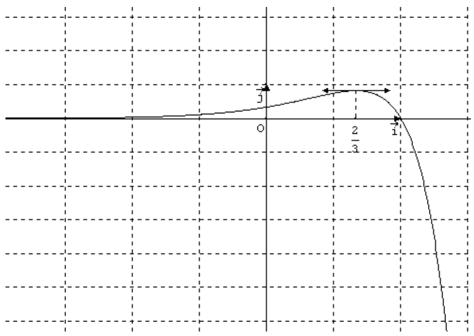
3. Pour m réel, on considère l'équation $g(x) = m$.
Discuter selon la valeur de m le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La courbe C ci-contre représente la fonction f définie sur $\left[2;\frac{4}{3}\right]$ par :

$f(x) = (ax+b)e^{cx}$, où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer.

On sait que la courbe C contient les points de coordonnées $(1 ; 0)$ et $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{2}{3}$.



1. Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de f.

2. Donner $f(0)$, $f(1)$ et $f'\left(\frac{2}{3}\right)$..

3. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

4. Déduire des questions précédentes les réels a, b et c.

Fonction exponentielle

Etude de fonctions – *CORRIGE*

Fiche(3)

Exercice 1

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	a	↘ 0

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^{-x}$ dont le tableau de variation est donné ci-contre.

1. Justifier les renseignements consignés dans le tableau en précisant la valeur de a.

☞ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = 2e^{-x} - (2x-1)e^{-x} = e^{-x}(-2x+3)$

Comme e^{-x} est toujours positif, le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $-2x+3$. D'où le tableau de variation.

☞ $a = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2e^{-\frac{3}{2}}$

☞ Limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

☞ Limite en $+\infty$

L'écriture de f abouti à une forme indéterminée mais $f(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Exercice 2

Partie A- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + e^x$. On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. Etudier les variations de f.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 1 + e^x$

$f'(x)$ est une somme de terme strictement positifs donc pour tout x, $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante.

3. Déterminer les coordonnées du point de C où la tangente T a pour coefficient directeur 3.

On cherche x tel que $f'(x) = 3$ soit $e^x = 2$ donc $x = ln2$

$f(ln2) = 2 + ln2$ donc les coordonnées du point sont $(ln2 \,;\, 2 + ln2)$

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. Etudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

$f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$.

Sur $[-1 \,;\, 0]$, la fonction f est continue et strictement croissante. Elle passe de $f(-1) < 0$ à $f(0) > 0$, donc elle prend une seule fois la valeur intermédiaire 0. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1 \,;\, 0]$ que l'on notera α.

x	$f(x)$
−1	−1,368
−0,57	−0,0045
α	0
−0,56	0,0112
0	1

On déduit du tableau de valeurs ci-contre que $-0{,}57 < \alpha < -0{,}56$.

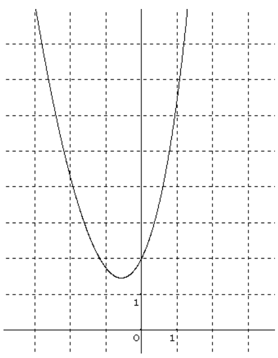
De plus, $f(x)$ est négatif si $x < \alpha$ et positif sinon.

5. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$. Préciser la position de D par rapport à C. Pour quelles valeurs de x la distance entre C et D (mesurée parallèlement à $(O ; \vec{\jmath})$), est-elle inférieure à 0,01 cm ?

$f(x) - x = e^x$ qui tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ donc la droite D asymptote à C en $-\infty$.

De plus, pour tout x, e^x est toujours positif donc la courbe C est toujours au-dessus de D.

6. Représenter C sur [-3 ; 2], ainsi que D et T.



Partie B- La courbe Γ ci-contre représente dans un repère orthonormé la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + 2e^x$.

1. En utilisant ce qui précède, étudier les variations de g.

On veillera à donner, dans le tableau de variation, des valeurs exactes. On pourra poser $\beta = g(\alpha)$.

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = 2x + 2e^x = 2f(x)$.

Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$		$+$
Variation de g	$+\infty$ ↘	$g(\alpha)$	↗ $+\infty$

2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Fonction exponentielle

3. Pour m réel, on considère l'équation $g(x) = m$. Discuter selon la valeur de m le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation.

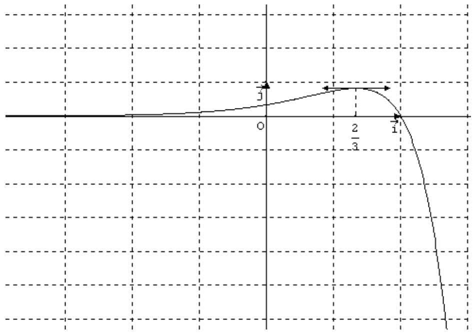
Si $\alpha > \beta$, l'équation admet deux solutions

Si $\alpha < \beta$, l'équation n'admet pas de solution

Si $\alpha = \beta$, l'équation admet une seule solution

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). La courbe C ci-contre représente la fonction f définie sur $\left[2;\frac{4}{3}\right]$ par : $f(x) = (ax + b)e^{cx}$, où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer.



On sait que la courbe C contient les points de coordonnées (1 ; 0) et $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{2}{3}$.

1. Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de f.

2. Donner $f(0)$, $f(1)$ et $f'\left(\frac{2}{3}\right)$..

$f(0) = \frac{1}{3}$, $f(1) = 0$ et $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$..

3. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

$f(x) = (ax + b)e^{cx}$ donc $f'(x) = e^{cx}(cax + a + cb)$

4. Déduire des questions précédentes les réels a, b et c.

$f(0) = \frac{1}{3}$, donc $b = \frac{1}{3}$

$f(1) = 0$, donc $(a + b)e^{c} = 0 \quad \Rightarrow a + b = 0 \quad \Rightarrow a = -b = -\frac{1}{3}$

$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, donc $\left(\frac{2ac}{3} + a + cb\right)e^{\frac{2c}{3}} = 0 \quad \Rightarrow \frac{2ac}{3} + a + cb = 0 \quad \Rightarrow -\frac{2c}{9} - \frac{1}{3} + \frac{c}{3} = 0 \quad \Rightarrow c = 3$

On a donc $f(x) = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)e^{3x}$

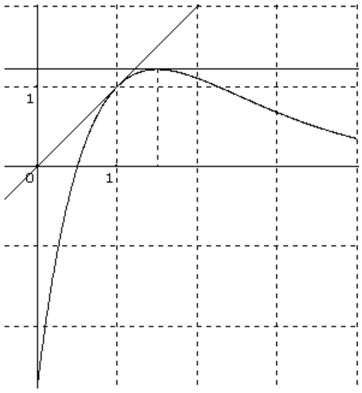
Fiche(4)

Fonction exponentielle

Exponentielle de fonction – Etude

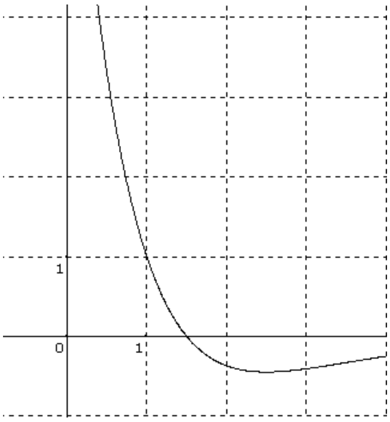
Exercice 1

On donne ci-contre la courbe Γ représentative d'une fonction f définie sur [0 ; 4] et ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 1,5.

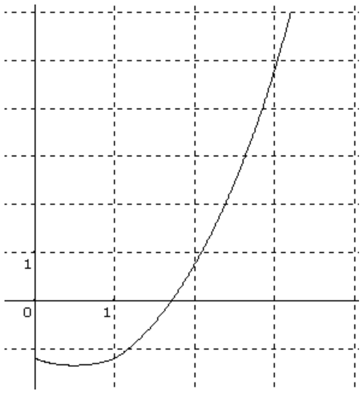


1. Lire graphiquement $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(1{,}5)$.

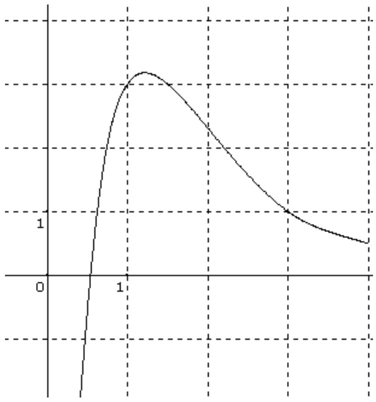
2. Parmi les trois courbes (courbes 1 à 3), laquelle est susceptible de représenter f', la fonction dérivée de f ? Justifier la réponse à l'aide d'arguments graphiques.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

3. On admet que $f(x) = (ax + b)e^{-x+1}$ où a et b sont deux réels fixés. Calculer $f'(x)$ puis utiliser la question **1.** pour déterminer a et b.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur]-∞ ; 1] par : $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^{x} - 2x - 4$.

On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthogonal (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

A- 1. Déterminer la limite de f en -∞.

2. Soit $g(x) = e^{x}\left(\frac{3}{2}e^{x} - 1\right)$. Démontrer que $g(x)$ s'annule pour $x = \ln\frac{2}{3}$.

Etudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle]-∞ ; 1].

3. a) Démontrer que $f(x) - (-2x - 4) = g(x)$.

b) En déduire que la droite D d'équation $y = -2x - 4$ est asymptote à C.

Etudier la position de C par rapport à D.

4. Calculer $f'(x)$. Démontrer que : pour tout x de]-∞ ; 1], $f'(x) = (3e^{x} + 2)(e^{x} - 1)$.

En déduire le signe de $f'(x)$. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

B- 1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 dans l'intervalle [-3 ; 0]. En utilisant une calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de x_0.

2. a) Résoudre l'équation $3e^{2x} - e^{x} - 2 = 2$ en posant $X = e^{x}$.

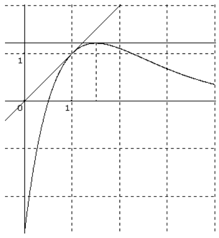
b) En déduire qu'il existe un point A unique de C où la tangente a pour coefficient directeur 2, et que l'abscisse de A est égale à $\ln\frac{4}{3}$.

Tracer la droite D, la courbe C et la tangente à C en A.

Fiche(4)

Fonction exponentielle

Exponentielle de fonction – Etude – *CORRIGE*



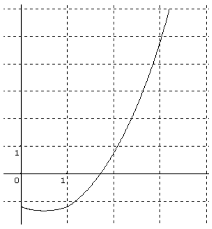
Exercice 1

On donne ci-contre la courbe Γ représentative d'une fonction *f* définie sur [0 ; 4] et ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 1,5.

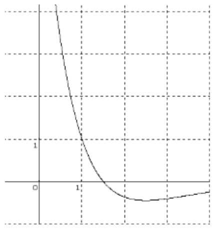
1. Lire graphiquement *f*(1), *f* '(1) et *f* '(1,5).

$f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ et $f'(1{,}5) = 0$

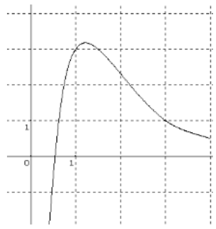
2. Parmi les trois courbes (courbes 1 à 3), laquelle est susceptible de représenter *f* ', la fonction dérivée de *f* ? Justifier la réponse à l'aide d'arguments graphiques.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

f est croissante sur]0 ; 1,5[et décroissante sur]1,5 ; 4[donc f' doit être positive sur]0 ; 1,5[et négative sur]1,5 ; 4[. C'est la courbe 1 qui convient.

3. On admet que $f(x) = (ax+b)e^{-x+1}$ où a et b sont deux réels fixés. Calculer *f* '(*x*) puis utiliser la question **1.** pour déterminer a et b.

$f(x) = (ax+b)e^{-x+1}$ donc $f'(x) = e^{-x+1}(-ax-b+a)$

$f(1) = 1$, donc $a+b=1$

$f'(1) = 1$, donc $-b = 1$. Il vient alors que $a = 2$ On a donc $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$

Exercice 2

Soit *f* la fonction définie sur]-∞ ; 1] par : $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^{x} - 2x - 4$. On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthogonal (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

A- 1. Déterminer la limite de *f* en -∞.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2. Soit $g(x) = e^{x}\left(\frac{3}{2}e^{x} - 1\right)$. Démontrer que *g*(*x*) s'annule pour $x = ln\frac{2}{3}$. Etudier le signe de *g*(*x*) sur l'intervalle]-∞ ; 1].

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = ln\frac{2}{3}$

$g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > ln\frac{2}{3}$ On en déduit que $g(x) < 0$ pour $x < ln\frac{2}{3}$

3. a) Démontrer que *f*(*x*) – (-2*x* – 4) = *g*(*x*). $f(x) - (-2x-4) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^{x} = g(x)$

b) En déduire que la droite D d'équation *y* = -2*x* – 4 est asymptote à C. Etudier la position de C par rapport à D.

$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}e^{x} - 1\right) = -1$

On en déduit que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. Donc la droite D est asymptote à C en $-\infty$.

D'après l'étude du signe de $g(x)$, on sait que C est au−dessous de D si $x \in]-\infty\,;\, ln\frac{2}{3}]$ et au−dessus de D si $x \in [ln\frac{2}{3}\,;1]$

4. Calculer *f* '(*x*). Démontrer que : pour tout *x* de]-∞ ; 1], *f* '(*x*)=(3e^{x}+2)(e^{x}–1). En déduire le signe de *f* '(*x*). Dresser le tableau de variation de *f*.

$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^{x} - 2x - 4$ donc $f'(x) = 3e^{2x} - e^{x} - 2$

$(3e^{x}+2)(e^{x}-1) = 3e^{2x} - 3e^{x} + 2e^{x} - 2 = f'(x)$

Pour tout x de $]-\infty\,;1]$, $3e^{x} + 2 > 0$

$e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 1 \Leftrightarrow x > 0.$

$f(1) = \frac{3}{2}e^{2} - e - 6$

x	$-\infty$		0		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	↘	$-\frac{7}{2}$	↗	$f(1)$

B- 1. Justifier que l'équation *f*(*x*) = 0 admet une solution x_0 dans l'intervalle [-3 ; 0]. En utilisant une calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de x_0.

$f(-3) = \frac{3}{2}e^{6} - e^{-3} + 2 > 0$ et $f(0) = -\frac{7}{2}$

x	$f(x)$
−3	1,954
−2,1	0,10004
α	0
−2	−0,1079
0	−3,5

Sur $[-3\,;0]$, la fonction f est continue et strictement croissante. Elle passe de $f(-3) > 0$ à $f(0) < 0$, donc elle prend une seule fois la valeur intermédiaire 0. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3\,;0]$ que l'on notera α.

On déduit de la table de la calculatrice que $-2{,}1 < \alpha < -2$.

2. a) Résoudre l'équation $3e^{2x} - e^{x} - 2 = 2$ en posant $X = e^{x}$.

en posant X = e^x, l'équation $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$ devient $3X^2 - X - 4 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \times 3 \times 4 = 49$. On a donc deux solutions $X_1 = \frac{4}{3}$ et $X_2 = -1$.

On cherche donc x tel $e^x = \frac{4}{3}$ ou $e^x = -1$. Seule une de ces équations admet une solution : $x = ln\frac{4}{3}$.

b) En déduire qu'il existe un point A unique de C où la tangente a pour coefficient directeur 2, et que l'abscisse de A est égale à $\ln\frac{4}{3}$.
Tracer la droite D, la courbe C et la tangente à C en A.

On cherche x tel que $f'(x) = 2$ soit tel que $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$.

Seul un point convient, son abscisse est $ln\frac{4}{3}$

Fonction exponentielle

Exercices d'annales

Nouvelle Calédonie – 2008

I. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 0{,}5x + e^{-0{,}5x+0{,}4}$.

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et vérifier que f admet un minimum en 0,8.

II. Application économique

Une entreprise fabrique des objets. $f(x)$ est le coût total de fabrication, en milliers d'euros, de x centaines d'objets. Chaque objet fabriqué est vendu 6 €.

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût total de fabrication soit minimum?

2. Le résultat (recette moins coûts), en milliers d'euros, obtenu par la vente de x centaines d'objet est :
$R(x) = 0{,}1x - e^{-0{,}5x+0{,}4}$.

a. Étudier les variations de R sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Montrer que l'équation $R(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

c. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise un bénéfice sur la vente des objets.

Asie juin 2008

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \frac{10-x}{x}$

1. Calculer les limites de u en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier les variations de u.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{u(x)}$.

3. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?

4. Établir, en justifiant, le tableau de variations de f .

5. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 1$.

6. L'équation $f(x) = -x$ admet-elle une solution? Pourquoi ?

Toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée.

Fonction exponentielle

Exercices d'annales – *CORRIGE*

Nouvelle Calédonie – 2008

I. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=0{,}5x+e^{-0{,}5x+0{,}4}$.

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;+\infty[$, posons $u(x)=-0{,}5x+0{,}4$. On a $u'(x)=-0{,}5$.

$f(x)=0{,}5x+e^{u(x)}$ d'où, $f'(x)=0{,}5+u'(x)e^{u(x)}$. Ainsi $f'(x)=0{,}5-0{,}5e^{-0{,}5x+0{,}4}$

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ et vérifier que f admet un minimum en 0,8.

Étudions le signe de la dérivée :

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 0{,}5-0{,}5e^{-0{,}5x+0{,}4}\geq 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}5x+0{,}4}\leq 1 \Leftrightarrow -0{,}5x+0{,}4\leq 0 \Leftrightarrow x\geq 0{,}8$

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de la dérivée :

x	0		0,8		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	1,4	$\nearrow$	

D'après le tableau des variations, la fonction f admet un minimum en 0,8 et $f(0{,}8)=0{,}5\times 0{,}8+e^{-0{,}5\times 0{,}8+0{,}4}=1{,}4$

II. Application économique

Une entreprise fabrique des objets. $f(x)$ est le coût total de fabrication, en milliers d'€, de x centaines d'objets. Chaque objet fabriqué est vendu 6€.

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût total de fabrication soit minimum?

La fonction f admet un minimum en 0,8 donc le coût total de fabrication est minimum pour la production de 80 objets.

2. Le résultat (recette moins coûts), en milliers d'euros, obtenu par la vente de x centaines d'objet est : $R(x)=0{,}1x-e^{-0{,}5x+0{,}4}$.

a. Étudier les variations de R sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

La dérivée de la fonction R est la fonction R' définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par $R'(x)=0{,}1+0{,}5e^{-0{,}5x+0{,}4}$

$R'(x)$ est une somme de termes strictement positifs, donc pour tout réel x, $R'(x)>0$.

Il s'ensuit que R est une fonction strictement croissante.

b. Montrer que l'équation $R(x)=0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-0{,}5x+0{,}4)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$ Donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-0{,}5x+0{,}4}=0$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=+\infty$ De plus $R(0)=-e^{0{,}4}<0$

Sur $[0\ ;+\infty[$, la fonction R est continue et strictement croissante. Elle passe de $R(0)<0$ à $+\infty$, donc elle prend une seule fois la valeur intermédiaire 0. Ainsi l'équation $R(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ que l'on notera α.

On déduit de la table de la calculatrice que $3{,}12<\alpha<3{,}13$.

x	$R(x)$
3	−0,033
3,12	−0,001
α	0
3,13	0,001
4	0,198

c. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise un bénéfice sur la vente des objets.

Dire que l'entreprise réalise un bénéfice signifie que $R(x)>0$. Or la fonction R étant strictement croissante, $R(x)>0 \Leftrightarrow x>\alpha$

Pour que cette entreprise réalise un bénéfice elle doit produire et vendre au moins 313 objets.

Asie juin 2008

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $u(x)=\frac{10-x}{x}$

1. Calculer les limites de u en 0 et en $+\infty$.

Limite en 0

$\lim\limits_{x\to 0}(10-x)=10$ et $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ Alors par quotient

Alors par quotient $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10-x}{x}=+\infty$

Limite en $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x}=-1$

2. Étudier les variations de u.

u est définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et $u'(x)=-\frac{10}{x^2}$

Or pour tout x de $]0\ ;+\infty[$, $-\frac{10}{x^2}<0$. Il en découle que u est strictement décroissante.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=e^{u(x)}$.

3. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?

Fonction exponentielle

Limite en 0

$\lim\limits_{x \to 0} u(x) = +\infty$ Et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ Donc par composition Donc par composition $\lim\limits_{x \to 0} e^{u(x)} = +\infty$

Limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -1$ Et $\lim\limits_{x \to -1} e^x = e^{-1}$ Donc par composition Donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{u(x)} = e^{-1}$

4. Établir, en justifiant, le tableau de variations de *f*.

D'après le cours, on sait que u et e^u ont les mêmes variations. La fonction f est donc strictement décroissante. D'où son tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e^{-1}

5. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 1$.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$

6. L'équation $f(x) = -x$ admet-elle une solution? Pourquoi ?

Toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée.

Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $e^{u(x)} > 0$ et $-x < 0$

On peut en déduire que sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) > -x$. Donc l'équation $f(x) = -x$ n'a pas de solution.

Fonction exponentielle

Ajustement exponentielle

Centres étrangers – juin 2009

Une exploitation minière extrait un minerai rare dans ses gisements depuis l'année 1963.

Le tableau suivant indique la quantité extraite y_i en tonnes durant l'année désignée par son rang x_i :

Année	1963	1968	1973	1978	1983	1988	1993	1998	2003	2008
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité extraite y_i en tonnes	18,1	15,7	13,3	11	9,3	7,8	7,1	6,1	5,2	4,3

Le nuage de points associé à cette série statistique à deux variables est représenté dans le repère orthogonal (O; I, J) de l'annexe 1. Les unités graphiques de ce repère sont 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée.

Dans cet exercice, on désigne par la variable y la quantité extraite en tonnes et par la variable x le rang de l'année.

Première partie

En première approximation, on envisage de représenter y en tant que fonction affine de x.

La droite D d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés admet pour équation $y=-1{,}5x+16{,}5$ dans laquelle les deux coefficients sont des valeurs arrondies au dixième.

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point dans le repère de l'annexe 1.
2. Tracer la droite D dans le repère de l'annexe 1.
3. En considérant cet ajustement affine, quelle quantité de minerai, au dixième de tonne près, l'exploitation peut-elle prévoir d'extraire durant l'année 2013 ?

Deuxième partie

On admet que la courbe tracée ci-dessous, représente un ajustement exponentiel de y en fonction de x et que son équation est de la forme$y = ke^{px}$ où k est un entier naturel et p un nombre réel.

1. En utilisant cette courbe, lire la quantité de minerai extrait, au dixième de tonne près, que l'ajustement exponentiel laisse prévoir pendant l'année 2013.
2. En supposant que la courbe passe par les points A(0 ; 18) et B(3 ; 11,2), calculer l'entier naturel k et le réel p dont on donnera une valeur approchée arrondie au centième.

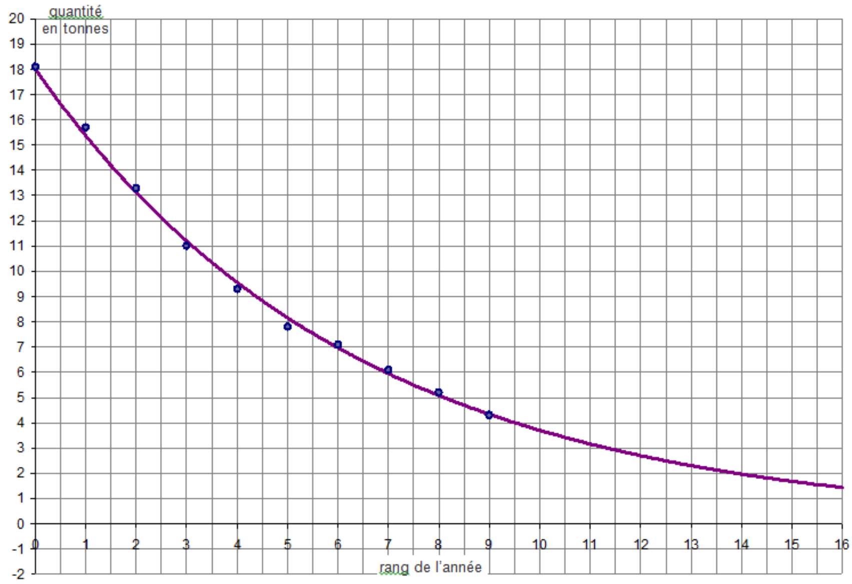
Troisième partie

On effectue le changement de variable $z = \ln y$ et on pose $z_i = \ln y_i$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant une valeur approchée de chaque résultat arrondie au centième :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_i										

2. À l'aide de la calculatrice et en donnant une valeur approchée de chaque coefficient arrondie au centième, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
3. En déduire l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = ke^{px}$ et retrouver ainsi, en arrondissant k au dixième, les coefficients k et p calculés à la question 2. de la deuxième partie.



Fonction exponentielle

Ajustement exponentielle

Centres étrangers – juin 2009 –*CORRIGE*

Une exploitation minière extrait un minerai rare dans ses gisements depuis l'année 1963.
Le tableau suivant indique la quantité extraite y_i en tonnes durant l'année désignée par son rang x_i :

Année	1963	1968	1973	1978	1983	1988	1993	1998	2003	2008
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité extraite y_i en tonnes	18,1	15,7	13,3	11	9,3	7,8	7,1	6,1	5,2	4,3

Le nuage de points associé à cette série statistique à deux variables est représenté dans le repère orthogonal (O; I, J) de l'annexe 1. Les unités graphiques de ce repère sont 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée.
Dans cet exercice, on désigne par la variable y la quantité extraite en tonnes et par la variable x le rang de l'année.

Première partie

En première approximation, on envisage de représenter y en tant que fonction affine de x.
La droite D d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés admet pour équation $y = -1{,}5x + 16{,}5$ dans laquelle les deux coefficients sont des valeurs arrondies au dixième.

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point dans le repère de l'annexe 1.

On a $\bar{x} = 4{,}5$ et $\bar{y} = 9{,}79$. Les coordonnées du point moyen G de cette série statistique sont G4,59,79.

2. Tracer la droite D dans le repère de l'annexe 1.

La droite D passe par les points de coordonnées (0 ; 16,5) et (11 ; 0)

3. En considérant cet ajustement affine, quelle quantité de minerai, au dixième de tonne près, l'exploitation peut-elle prévoir d'extraire durant l'année 2013 ?

Le rang de l'année 2013 est 10. D'où une estimation de la quantité de minerai : $-1{,}5 \times 10 + 16{,}5 = 1{,}5$
Avec cet ajustement, on peut prévoir d'extraire durant l'année 2013 1,5 tonnes de minerai.

Deuxième partie

On admet que la courbe tracée ci-dessous, représente un ajustement exponentiel de y en fonction de x et que son équation est de la forme$y = ke^{px}$ où k est un entier naturel et p un nombre réel.

1. En utilisant cette courbe, lire la quantité de minerai extrait, au dixième de tonne près, que l'ajustement exponentiel laisse prévoir pendant l'année 2013.

Avec la précision permise par le graphique, l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 10 est comprise entre 3,7 et 3,8.
La quantité de minerai extrait que l'ajustement exponentiel laisse prévoir pendant l'année 2013 est d'environ 3,7 tonnes.

2. En supposant que la courbe passe par les points A(0 ; 18) et B(3 ; 11,2), calculer l'entier naturel k et le réel p dont on donnera une valeur approchée arrondie au centième.

Les coordonnées des points A(0 ; 18) et B(3 ; 11,2) vérifient l'équation de la courbe.

D'où k et p sont solutions du système : $\begin{cases} k \times e^{0\times p} = 18 \\ k \times e^{3\times p} = 11{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 18 \\ e^{3p} = \frac{11{,}2}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 18 \\ p = \frac{1}{3} ln \frac{11{,}2}{18} \approx -0{,}158 \end{cases}$

La courbe qui représente un ajustement exponentiel de y en x a pour équation $y = 18e^{-0{,}16x}$

Troisième partie

On effectue le changement de variable $z = lny$ et on pose $z_i = lny_i$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant une valeur approchée de chaque résultat arrondie au centième :

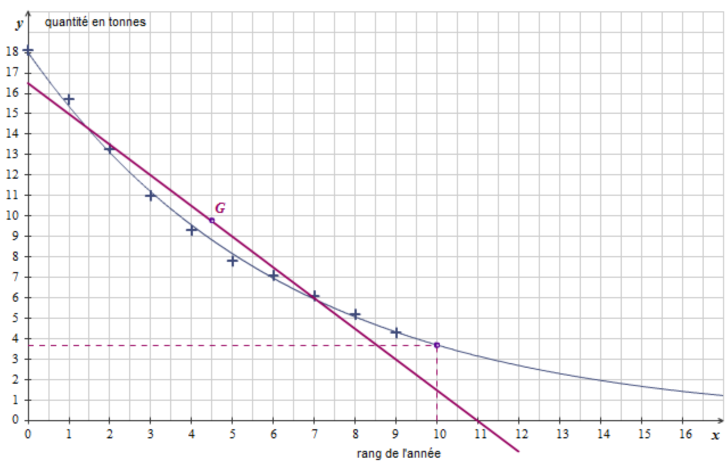
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_i	2,90	2,75	2,59	2,40	2,23	2,05	1,96	1,81	1,65	1,46

2. À l'aide de la calculatrice et en donnant une valeur approchée de chaque coefficient arrondie au centième, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

Une équation de la droite d d'ajustement de z en x, obtenue à l'aide de la calculatrice, est $z = -0{,}16x + 2{,}89$ (*coefficients arrondis au centième*)

3. En déduire l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = ke^{px}$ et retrouver ainsi, en arrondissant k au dixième, les coefficients k et p calculés à la question 2. de la deuxième partie.

$z = lny$ et $z = -0{,}16x + 2{,}89$.
On a donc $lny = -0{,}16x + 2{,}89$
Soit $y = e^{-0{,}16x+2{,}89} = e^{-0{,}16x} \times e^{2{,}89}$
Or $e^{2{,}89} \approx 17{,}9$
Il vient alors $y = 18 \times e^{-0{,}16x}$



Fonction exponentielle

Antilles - Guyane - juin 2009

D'après l'INSEE, l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre (base 100 en 2000) a évolué entre 2000 et 2007 de la manière suivante :

année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i, $0 \leq i \leq 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i, $0 \leq i \leq 7$	100	105,6	106,9	110,8	121,3	132,5	145,5	161,8

partie 1 : *Un ajustement affine est-il possible ?*

1. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points $(x_i ; y_i)$ $0 \leq i \leq 7$ *(unités graphiques : 2 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses ; 2 cm pour 10 unités d'indice sur l'axe des ordonnées, en graduant ce dernier à partir de y = 90).*
2. Expliquer pourquoi un ajustement affine de ce nuage de points ne parait pas approprié.

partie 2 : *On essaie un autre ajustement*

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous ; on donnera les résultats à 10^{-2}

x_i, $0 \leq i \leq 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z = \ln y_i$, $0 \leq i \leq 7$								

2. a. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés : les coefficients seront arrondis au centième.
   b. En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = A \times e^{Bx}$ où A et B sont des réels.
   c. Dans le repère précédent, représenter la fonction f définie par $f(x) = 95,6 \times e^{0,07x}$.
   d. À l'aide de ce modèle, donner une estimation de l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre pour l'année 2009.

partie 3 : *Ce nouvel ajustement permet-il de prévoir l'avenir* ?

« Baisse des permis de construire et donc des mises en chantier, stocks de logements neufs trop importants, hausse des taux d'intérêts, des coûts des matériaux et de la main d'œuvre ... À en croire le numéro 1 de l'assurance-crédit en France, qui publiait jeudi son étude intitulée « *Immobilier, construction : à quand la sortie de crise* ? », le BTP français donne des signes de faiblesse. Et doit s'attendre selon l'assureur, tout d'abord à une dégradation de sa rentabilité. »

À la lecture de cette analyse faite en avril 2008, peut-on utiliser le modèle exponentiel de la partie 2 pour pronostiquer le chiffre d'affaires du secteur bâtiment gros œuvre en 2009 ?

Fonction exponentielle

Antilles - Guyane - juin 2009 –*CORRIGE*

D'après l'INSEE, l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre (base 100 en 2000) a évolué entre 2000 et 2007 de la manière suivante :

année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i, $0 \leq i \leq 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i, $0 \leq i \leq 7$	100	105,6	106,9	110,8	121,3	132,5	145,5	161,8

partie 1 : *Un ajustement affine est-il possible ?*

1. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points $\left(x_i ; y_i\right)$ $0 \leq i \leq 7$ *(unités graphiques : 2 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses ; 2 cm pour 10 unités d'indice sur l'axe des ordonnées, en graduant ce dernier à partir de y = 90).*
2. Expliquer pourquoi un ajustement affine de ce nuage de points ne parait pas approprié.

Un ajustement affine ne semble pas approprié car les points du nuage ne sont pas "presque alignés". En effet, d'une année sur l'autre, l'accroissement moyen de l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre augmente.
D'une année sur l'autre, l'accroissement moyen de l'indice du chiffre d'affaires augmente, un ajustement exponentiel est plus adapté.

partie 2 : *On essaie un autre ajustement*

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous ; on donnera les résultats à 10^{-2}

x_i, $0 \leq i \leq 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z = \ln y_i$, $0 \leq i \leq 7$	4,61	4,66	4,67	4,71	4,80	4,89	4,98	5,09

2. a. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés : les coefficients seront arrondis au centième.

Une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés obtenue à l'aide de la calculatrice est $z = 0{,}07x + 4{,}56$ (coefficients arrondis au centième).

b. En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = A \times \mathrm{e}^{Bx}$ où A et B sont des réels.

On a $z = 0{,}07x + 4{,}56$ et $z = ln y$. Soit $ln y = 0{,}07x + 4{,}56$. D'où $y = e^{0{,}07x+4{,}56}$
Une estimation du montant de l'indice du chiffre d'affaires y en fonction du rang x de l'année est $y = A \times e^{Bx}$ avec $A = e^{4{,}56} \approx 95{,}6$ et $B = 0{,}07$.

c. Dans le repère précédent, représenter la fonction f définie par $f(x) = 95{,}6 \times e^{0{,}07x}$
d. À l'aide de ce modèle, donner une estimation de l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre pour l'année 2009.

Le rang de l'année est 9 et $f(9) = 95{,}6 \times e^{0{,}07\times 9} \approx 179{,}5$
L'indice du chiffre d'affaire du secteur du bâtiment gros œuvre pour l'année 2009 devrait être de 179,5

partie 3 : *Ce nouvel ajustement permet-il de prévoir l'avenir* ?

« Baisse des permis de construire et donc des mises en chantier, stocks de logements neufs trop importants, hausse des taux d'intérêts, des coûts des matériaux et de la main d'œuvre ... À en croire le numéro 1 de l'assurance-crédit en France, qui publiait jeudi son étude intitulée « *Immobilier, construction : à quand la sortie de crise* ? », le BTP français donne des signes de faiblesse. Et doit s'attendre selon l'assureur, tout d'abord à une dégradation de sa rentabilité. »
À la lecture de cette analyse faite en avril 2008, peut-on utiliser le modèle exponentiel de la partie 2 pour pronostiquer le chiffre d'affaires du secteur bâtiment gros œuvre en 2009 ?

La fonction $x \mapsto 0{,}07x$ est strictement croissante, d'où la fonction $x \mapsto e^{0{,}07x}$ est strictement croissante, ainsi que la fonction f définie par $f(x) = 95{,}6 \times e^{0{,}07\times x}$.
La fonction f qui sert de modèle, est strictement croissante, elle ne permet pas de prévoir une baisse de l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre. Donc cette fonction ne convient pas pour estimer l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre en 2009.