

LE COURS

**Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques**
FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMESIntroduction

Programme selon les sections :

- exponentielle et logarithme népérien : S, ES/L, STI2D, STL, hôtellerie
- exponentielles de base a : ES/L, ST2S, STI2D, STL
- logarithmes de base a : STI2D, STL
- logarithme décimal : ST2A, ST2S

Pré-requis :

Etude de fonctions – limites – puissances

Plan du cours**1. Fonctions exponentielles****2. Fonctions logarithmes****1. Fonctions exponentielles****A. Etude de la fonction exponentielle**Définition :

- Une **bijection** est une fonction telle que **chaque image admet un unique antécédent**.

Ex : la fonction $f(x) = 2x$ définie sur $\mathbb{R}$ est une bijection. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ ($x = \frac{y}{2}$).

La fonction carrée n'est pas une bijection. Pour tout $y > 0$ il existe deux réels dont l'image est y : $-\sqrt{y}$ et $\sqrt{y}$.

Fonction exponentielle :

La **fonction exponentielle** est la fonction **définie sur $\mathbb{R}$** qui à tout x appartenant à $\mathbb{R}$ associe e^x .

On la note e^x ou $\exp(x)$.

e est un **nombre réel** valant environ 2,718.

LE COURS


 Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques
 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES
Propriétés :

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle est une **bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$** :
 pour tout $a > 0$ il existe un **unique** $b \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^b$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \text{ entier naturel})$$

Pour tout $x < 0$, $e^x < 1$ et pour tout $x > 0$, $e^x > 1$.

$$e^0 = 1$$

Représentation graphique :

LE COURS

**Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques**
FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMESDérivées :

- La fonction exponentielle est **dérivable sur $\mathbb{R}$** et sa dérivée est :

$$f'(x) = e^x$$

La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.

- Soit une fonction **u définie et dérivable sur I** .

Alors la fonction **$g(x) = e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I** et sa dérivée est :

$$g'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

$$\text{Ex : } g(x) = e^{-2x} \quad g'(x) = -2e^x$$

Opérations :

Soient a et b deux réels. On a :

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^b = e^{a \times b} \quad (\text{d'où } \sqrt{e^a} = e^{\frac{1}{2}a})$$

Remarque : on retrouve ici toutes les propriétés des opérations avec des puissances.

B. Fonctions exponentielles de base a Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif.

La fonction exponentielle de base a est la fonction qui à tout x appartenant à $\mathbb{R}$ associe a^x .

La fonction que l'on appelle exponentielle est la fonction exponentielle de base e .

LE COURS


 Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques
 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

Les propriétés des opérations sont **les mêmes que pour la fonction exponentielle**.

Propriétés :

Une fonction exponentielle de base a est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

- Si $a > 1$:

La fonction exponentielle de base a est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

- Si $0 < a < 1$:

La fonction exponentielle de base a est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

Remarque : ces propriétés sont le prolongement de celles concernant les suites géométriques.

2. Fonctions logarithmes

A. Etude de la fonction logarithme népérien

Définition :

- Si une fonction f est une **bijection** définie sur I , on appelle sa **bijection réciproque** la fonction g qui à **tout** $f(x)$ **associe** x .

$$f: x \rightarrow f(x)$$

$$g: f(x) \rightarrow x$$

Remarque : une bijection réciproque est elle-même une bijection.

Fonction logarithme népérien :

La **fonction logarithme népérien** est la **bijection réciproque de la fonction exponentielle**.

La fonction exponentielle étant strictement positive, la fonction logarithme népérien est donc **définie sur** $]0; +\infty[$.

On la note **$\ln x$** .

Propriétés :

$$\text{On a : } \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad e^{\ln x} = x$$

LE COURS


 Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques
 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

La fonction logarithme népérien est une **bijection** de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:
 pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe un **unique** $b \in]0; +\infty[$ tel que $a = \ln b$.

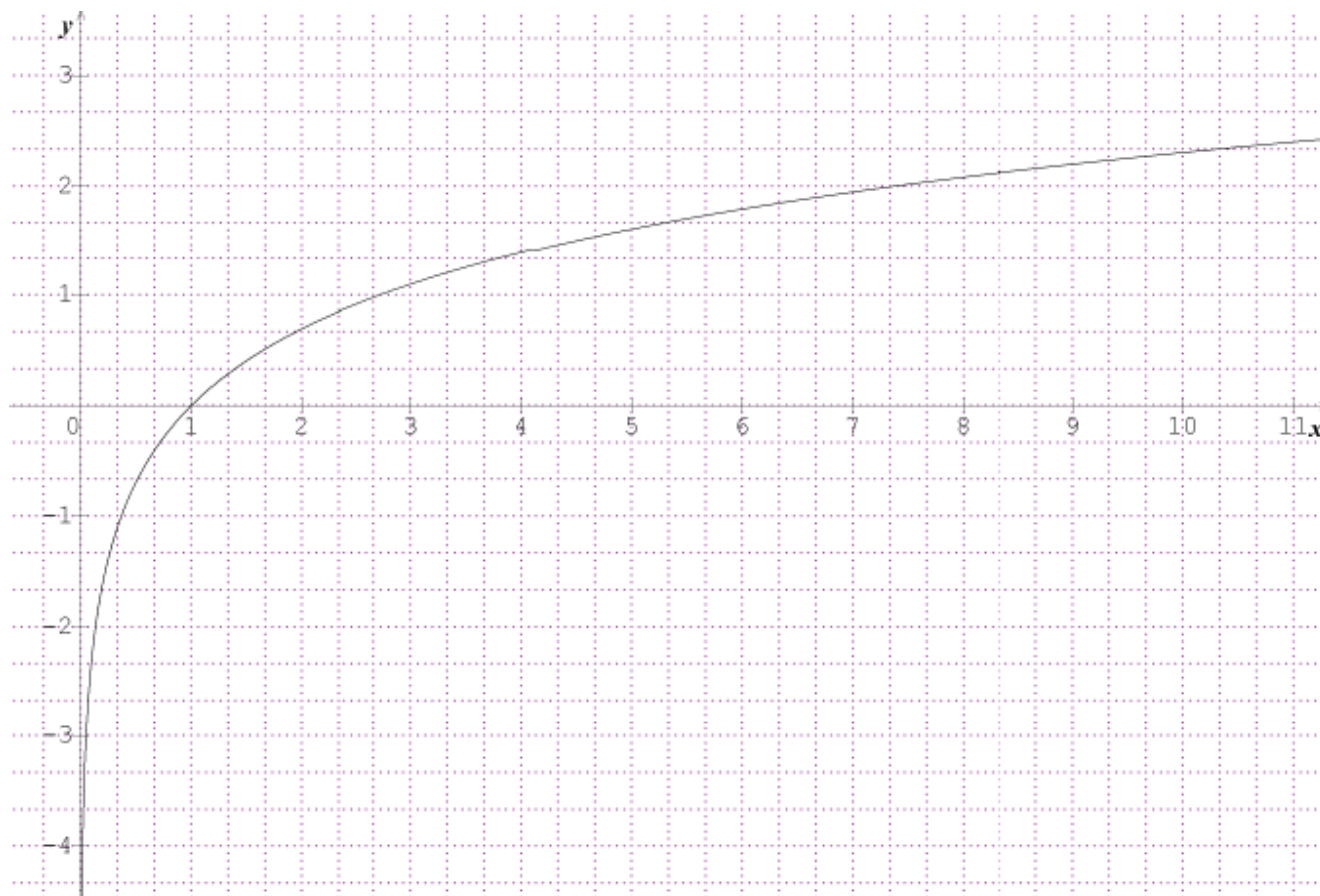
$a = \ln b$ si et seulement si $b = e^a$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \text{ entier naturel})$$

Pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\ln x > 0$.

$$\ln 1 = 0$$

Représentation graphique :



LE COURS


 Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques
 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES
Dérivées :

- La fonction logarithme népérien est **dérivable sur** $]0; +\infty[$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

- Soit une fonction **u définie et dérivable sur I** , et telle que pour tout $x \in I$ **$u(x) > 0$** .
 Alors la fonction **$g(x) = \ln(u(x))$** est **définie et dérivable sur I** et sa dérivée est :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\text{Ex : } g(x) = \ln(x^2 + 1) \quad g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Opérations :

Soient a et b deux réels **strictement positifs**. On a :

$$\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$$

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^b = b \times \ln a \quad (\text{d'où } \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a)$$

$$a^b = e^{b \times \ln a}$$

B. Fonctions logarithmes de base a Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif.

La fonction **logarithme de base a** est la **bijection réciproque** de la fonction **exponentielle de base a** .

La fonction exponentielle de base a étant strictement positive, la fonction logarithme de base a est donc **définie sur** $]0; +\infty[$.

LE COURS

**Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques**
FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

On la note $\log_a(x)$.

On a : $a^{\log_a(x)} = \log_a(a^x) = x$.

La fonction que l'on appelle *logarithme népérien* est la fonction *logarithme de base e*.

Les propriétés des opérations sont **les mêmes que pour le logarithme népérien**.

Propriétés :

- Si $a > 1$:

La fonction logarithme de base a est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

- Si $0 < a < 1$:

La fonction logarithme de base a est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

Logarithme décimal :

La fonction **logarithme décimal** est la fonction **logarithme de base 10**.

On la note $\log x$.

On a : $10^{\log x} = \log 10^x$

On retrouve le logarithme décimal dans le calcul du pH ou la mesure des décibels.