ALGEBRE DE BOOLE

Portes logiques de base, Table de vérité, Simplification des fonctions booléennes

I. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons étudier la logique utilisée dans les systèmes automatisés (traitement des données et des signaux digitaux dans la partie commande). Cette logique est découverte en **1847** par **George Boole** : mathématicien britannique **(1815-1864), sa logique** est basée sur deux variables binaires **0 et 1** ou signal digital, la variable binaire est représentée aussi par des états particuliers comme :

- arrêt marche ;
- ouvert fermé ;
- avant arrière ;
- vrai faux…etc.

II. Algèbre de Boole : Propriétés de base

Involution	$\bar{\bar{a}} = a$
Idempotence	$a + a = a$ $\quad a.a = a$
Complémentarité	$a\,.\bar{a} = 0$ $\quad a + \bar{a} = 1$
Éléments neutres	$a = a.1 = 1.a = a$ $\quad a + 0 = 0 + a = a$
Absorbants	$a + 1 = 1$ $\quad a.0 = 0$
Associativité	$(a.b).c = a.(b.c)$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
Distributivité	$a.(b + a) = a.b + a.c$ $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$
Règles de de Morgan	$\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$ $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$
Optimisation	$a + \bar{a}\,b = a + b$ $a + bc = (a + b)(a + c)$

II.1 Operateurs de base de l'Algèbre de Boole

Il existe quatre fonctions logiques élémentaires qui sont :

- La fonction égalité
- La fonction négation ou complémentation.
- La fonction intersection ou multiplication logique.

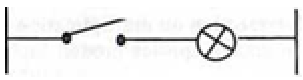
- La fonction réunion ou addition logique.

II.1.1. La fonction égalité

Cette fonction est appelée **OUI** ou fonction **ON**, son principe est comme suit :

On prend la lampe **L** et l'interrupteur **A :**

A L



Si A = 0 L = 0

Si A = 1 L= 1

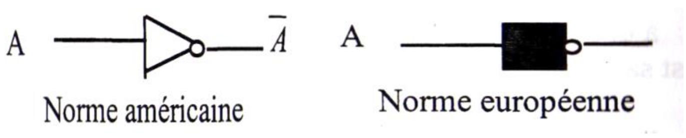
À chaque valeur de A corresponde la même valeur de L, on écrit alors : L = A

II.1.2. La fonction négation ou complémentation.

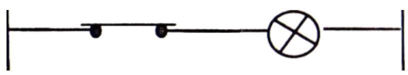
- Le complément ou l'inverse d'une variable binaire A, notée A, réalise le NON de cette variable ou NO en anglais ($\overline{A}$ se lit A barré ou encore non A).

$\overline{A}$ = 1 si et seulement si A = 0

L'opérateur qui réalise cette fonction d'inversion logique s'appelle un inverseur dont le symbole est le suivant :



Exemple1 :



A L

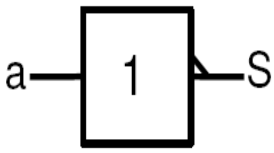
La lampe est allumée si on n'actionne pas

$\overline{A}$; elle s'éteint dans le cas contraire

$\overline{A}=1$ L=1

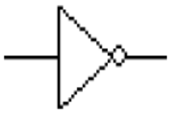
$\overline{A}=0$ L=0, On écrire alors $L=\overline{A}$

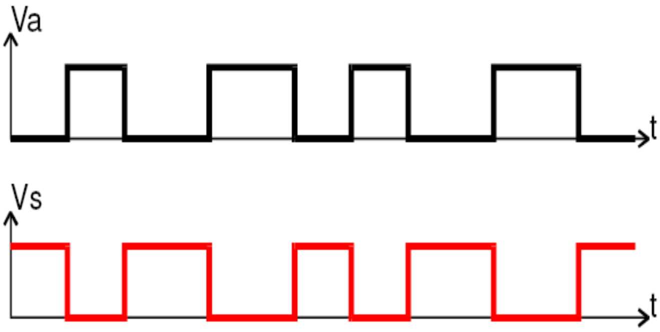
Table de vérité et chronogramme



$S=\overline{a}$

a	S
0	1
1	0

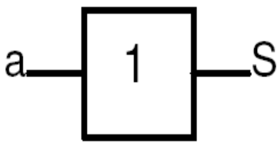




La fonction OUI

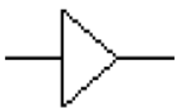
Cette fonction reproduit à l'identique le niveau logique présent sur son entrée.

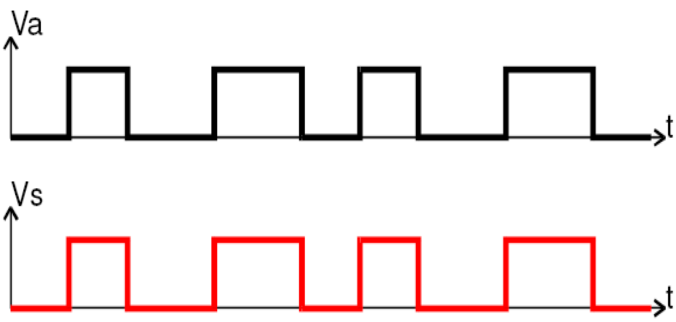
Table de vérité et chronogramme



$S=a$

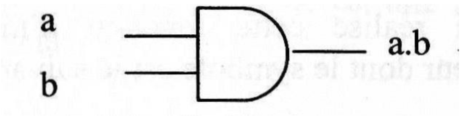
a	S
0	0
1	1





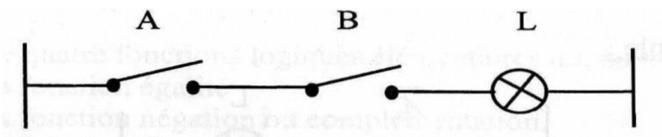
II.1.3. La fonction intersection ou multiplication logique

- Pour réaliser la fonction **ET**, on a besoin de deux variables binaires a et b, le produit de ces deux variables donne la fonction ET ou fonction AND. Le symbole qui réalise cette fonction est comme suit :



L'entrée de la porte est constituée par les deux variables binaires **a et b,** et sa sortie est le produit logique des deux variables binaires **a et b**

Exemple1 : *(on prend toujours l'interrupteur et la lampe)*



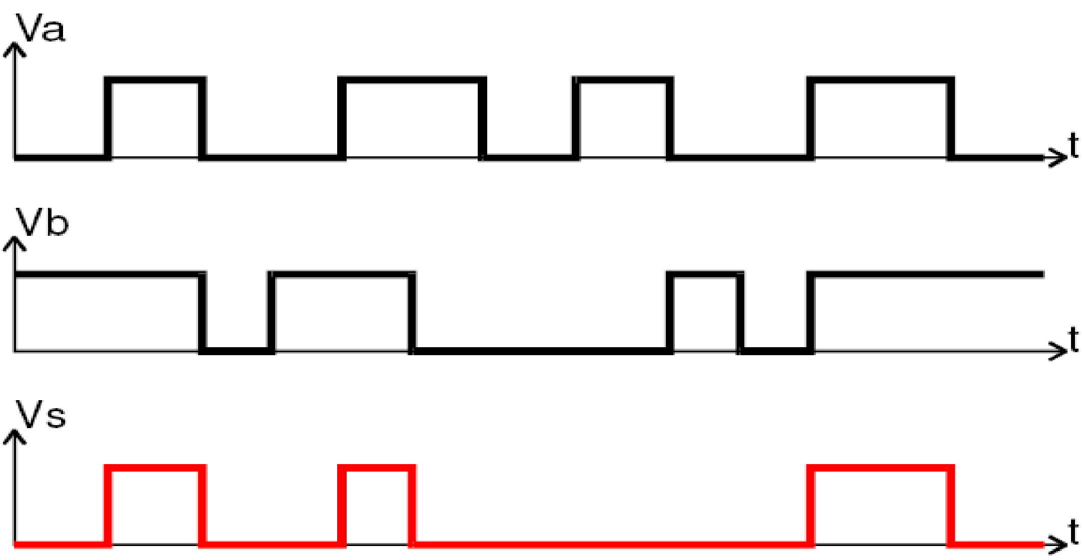
L est allumée si **A et B** sont fermées simultanément, **L** est éteinte pour tous les autres cas.

L = 1 si **A=1 ET B = 1** on écrit alors **L=A.B**

Table de vérité de la fonction AND

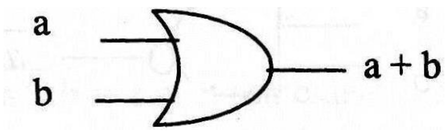
a	b	S = a.b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chronogramme

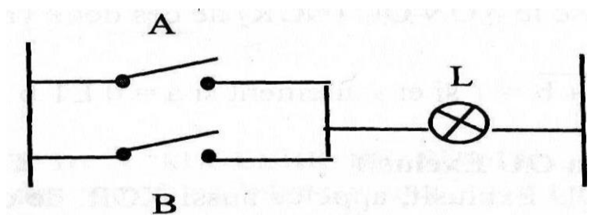


II.1.4. La fonction réunion ou addition logique

- Pour réaliser la fonction **OU**, on a besoin de deux variables binaires a et b, l'addition de ces deux variables donne la fonction **OU** ou fonction **OR** à la sortie de la porte logique. Le symbole qui réalise cette fonction est comme suit :



Exemple 1 :



L est allumée si on ferme A ou si on ferme B, soit :

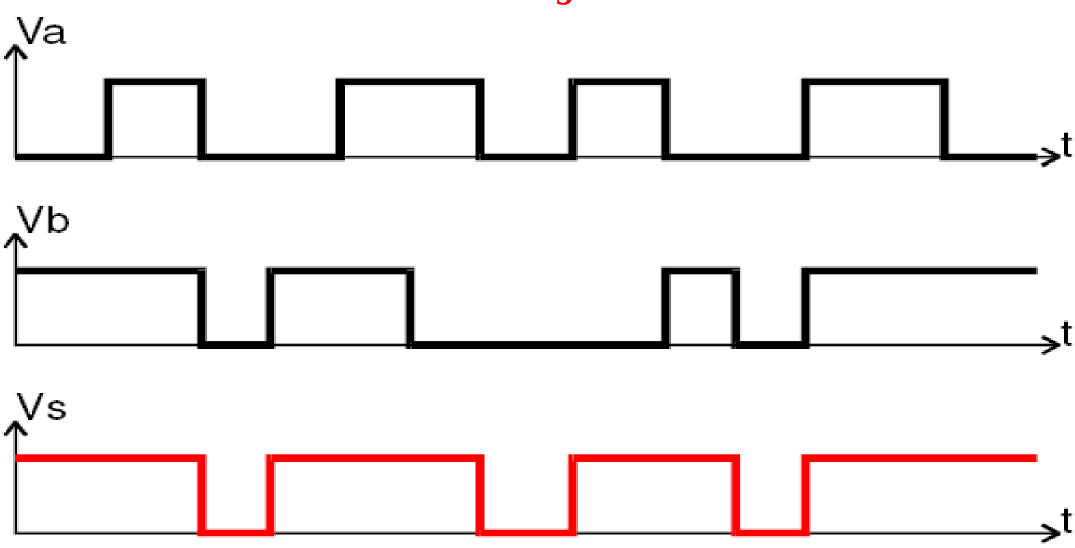
L = 1 si A = 1 OU B = 1 (ou les deux)

On écrit alors L = A + B

Table de vérité de la fonction OR

a	b	S = a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Chronogramme



III. Autres fonctions logiques

À partir des fonctions logiques élémentaires on déduit autres fonctions logiques qui sont :

- la fonction NON ET (NAND)
- la fonction NON OU (NOR)
- la fonction OU Exclusif
- la fonction Coïncidence

III.1. La fonction ET inversé (NAND)

La fonction NAND ou NON ET est la fonction ET inversée, sa sortie égale 0 si a =1 et b=1, donc $\overline{a.b} = 0$. Le symbole qui réalise cette fonction est le suivant :

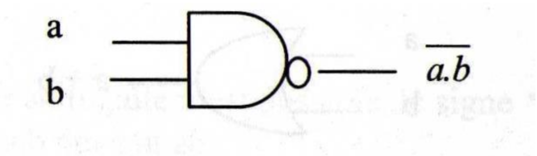
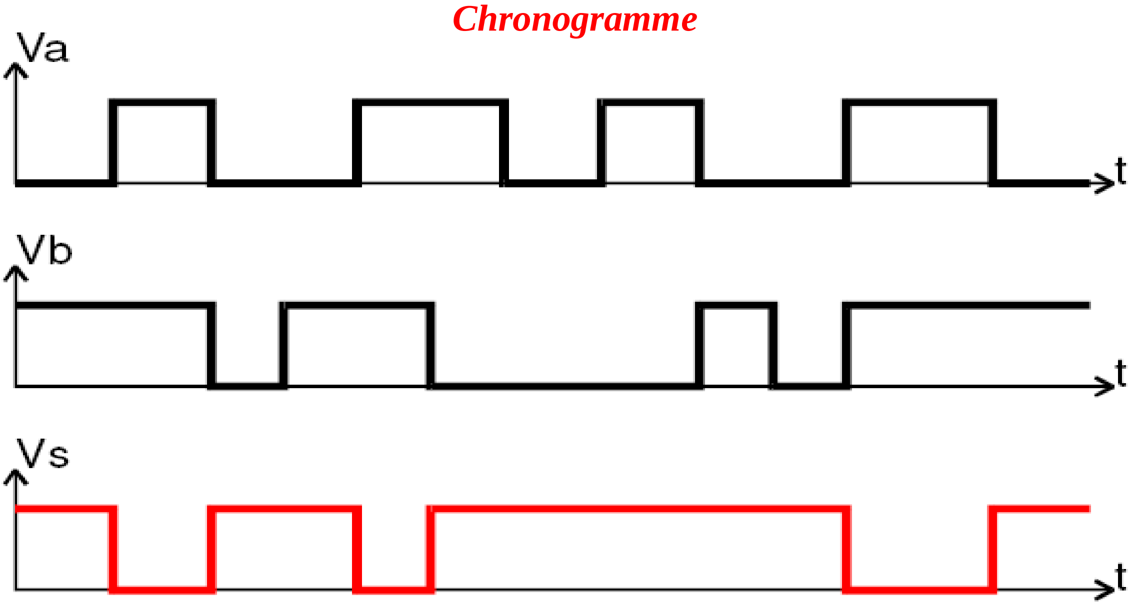


Table de vérité de la fonction NAND

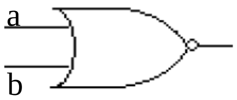
a	b	$S = \overline{a.b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Chronogramme



III.3.2. La fonction OU inversé (NOR)

La fonction **NOR** ou **OU NON** est la fonction **OU** inversée, sa sortie égale 1 si a =0 et b=0, donc $\overline{a+b} = 1$. Le symbole qui réalise cette fonction est le suivant.

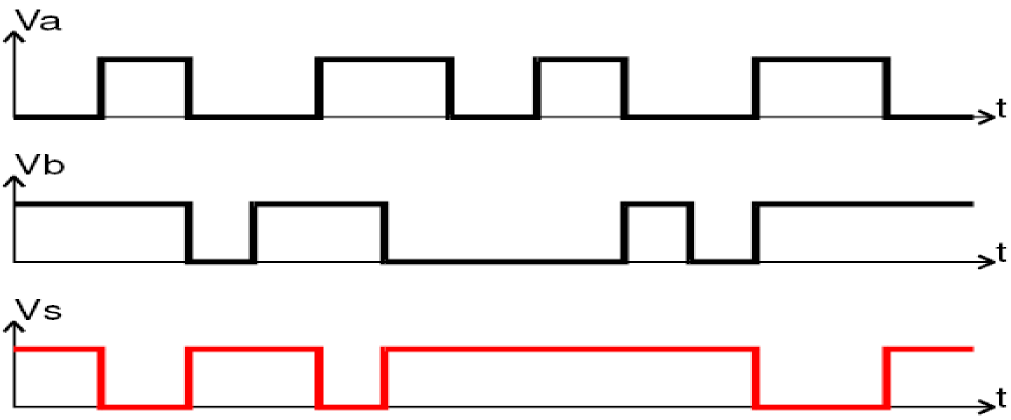


$\overline{a+b}$

Table de vérité de la fonction NOR

a	b	$S = \overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Chronogramme



III.3.3. La fonction ou exclusif

La fonction OU Exclusif ou XOR prend la valeur 1 si l'un des deux variables binaires prend 1, pour tous les autres cas prend la valeur 0.

$$a \oplus b = 1 \quad \text{si} \quad a = 1 \quad \text{ou} \quad b = 1$$

L'opérateur qui réalise cette fonction est symbolisé par :

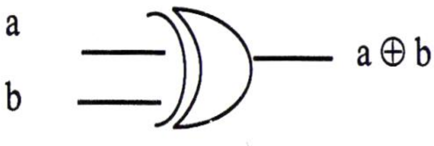
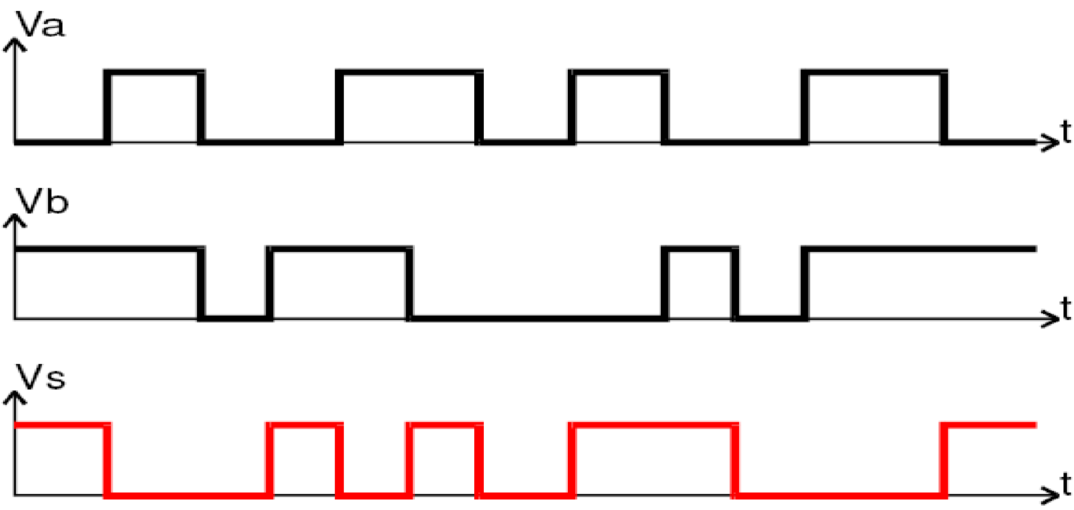


Table de vérité de la fonction XOR

a	b	$S = a \ominus b = \bar{a}.b + \bar{b}.a$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Chronogramme



Propriétés du XOR :

$$S = a \ominus b = \bar{a}.b + \bar{b}.a$$

- $a \oplus 0 = a$
- $a \oplus 1 = \bar{a}$
- $a \oplus a = 0$
- $a \oplus \bar{a} = 1$

III.3.4. La fonction Coïncidence *(Le OU-EXCLUSIF-NON)*

La fonction **OU EXCLUSIF-NON** prend la valeur **1** si et seulement les deux variables binaires **a et b** prennent la même valeur, pour tous les autres cas prend la valeur 0.

$$a\Theta b = \overline{a \oplus b} = 1 \text{ si et seulement si } a = b.$$

L'opérateur qui réalise cette fonction est symbolisé par :

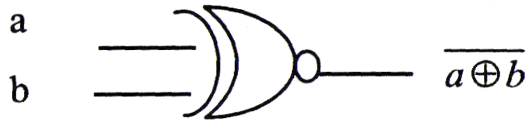
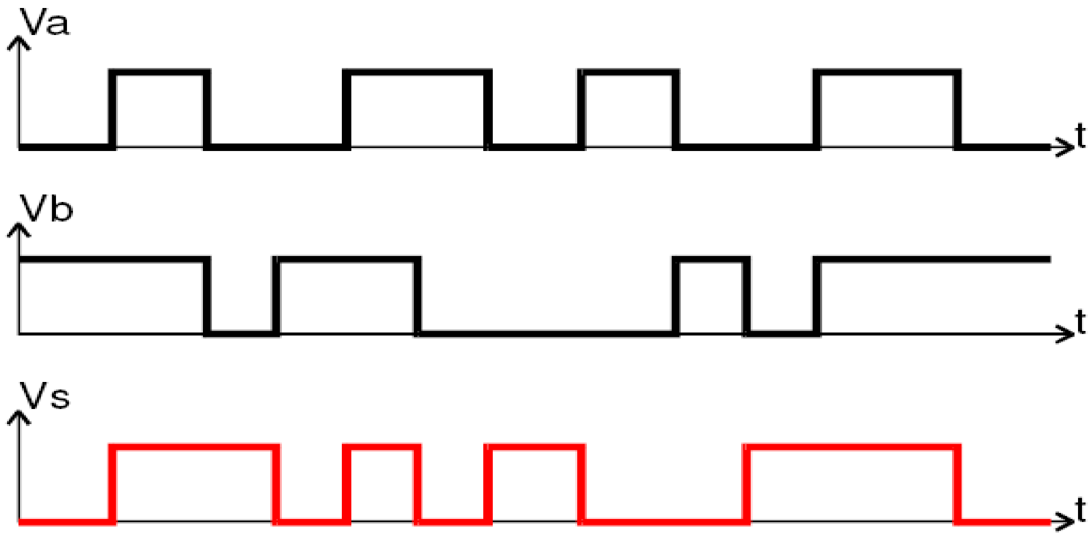


Table de vérité de la fonction OU-EXCLUSIF-NON

a	b	$S = \overline{a\Theta b} = ab + \bar{a}.\bar{b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chronogramme



IV. Table de vérité et équation logique :

Soit f(a,b)=1 si a=0 et b=1 sinon f(a,b)=0

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

IV.1. Passage de la forme algébrique à la table de vérité :

Soit : $f(a,b) = a.\bar{b} + \bar{a}.\bar{b}$

a	b	$f(a,b)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Exemple :

Soit : $f(a,b,c) = abc + ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

a	b	c	$f(a,b)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

V. Table de KARNAUGH

V.1. Définition

Pour la simplification des fonctions logiques, le tableau de ***Karnaugh*** est le moyen le plus utilisé dans la réduction des expressions booléennes.

V.2. Construction du tableau de karnaugh

- Tableau à 3 variables

Variables d'entrée

S \ ab	00	01	11	10
c = 0				
c = 1				

-Tableau à 4 variables

Variables d'entrée

Variable de sortie

S \ ab	00	01	11	10
cd = 00				
cd = 01				
cd = 11				
cd = 10				

Exemples

x \ y	0	1
0	**1**	0
1	0	**1**

$$f(x,y) = \overline{x}.\overline{y} + x.y$$

$$f(x,y) = (\overline{x}.+y)\,(x.\overline{y})$$

x \ y	0	1
0	**1**	**1**
1	0	**1**

$f(x,y) = \overline{x}.\overline{y} + \overline{x}.y + x.y$

$f(x,y) = \overline{x} + y$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	0	**1**	**1**
1	0	0	0	**1**

$f(x,y,z) = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.y.z + \overline{x}.y.\overline{z} + x.y.\overline{z}$

$f(x,y,z) = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.y + x.y.\overline{z}$

ab \ cd	00	01	11	10
00	**1**	0	0	0
01	**1**	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	**1**	**1**

$f(a,b,c,d) = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d} + \overline{a}.b.\overline{c}.\overline{d} + a.\overline{b}.c.d + a.\overline{b}.c.\overline{d}$

$f(a,b,c,d) = \overline{a}.\overline{c}.\overline{d} + a.\overline{b}.c.$

ab \ cd	00	01	11	10
00	**1**	**1**	0	0
01	**1**	**1**	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$f(a,b,c,d) = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.d + \overline{a}.b.\overline{c}.\overline{d} + \overline{a}.b.\overline{c}.d$

$f(a,b,c,d) = \overline{a}.\overline{c}$

Y	ab 00	ab 01	ab 11	ab 10
cd 00	1	0	0	1
cd 01	1	0	0	1
cd 11	1	0	0	1
cd 10	1	0	0	1

$$\boxed{Y = \bar{b}}$$

Y	ab 00	ab 01	ab 11	ab 10
cd 00	1	0	0	1
cd 01	0	0	0	0
cd 11	0	0	0	0
cd 10	1	0	0	1

$$\boxed{Y = \bar{b}\,\bar{d}}$$

Les circuits combinatoires particuliers

VI. Introduction

Les applications de l'algèbre de Boole sont illimitées dans les systèmes logiques combinatoires et séquentiels. Parmis les applications les plus rependues et les plus utilisées, on trouve :

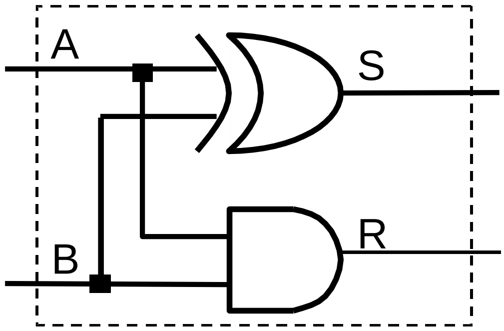
- Les codeurs
- Les décodeurs
- Les transcodeurs
- Les multiplexeurs
- Les démultiplexeurs…etc.

VI.1. Les circuits arithmétiques

VI.1.1. Demi-additionneur

On appelle demi-additionneur ou SEMI-ADDER (SA) le circuit logique qui réalise l'addition de deux bits sans tenir compte d'une retenue précédente éventuelle. La table de vérité relative à ce circuit est représentée par la figure suivante :

A	B	S	R
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



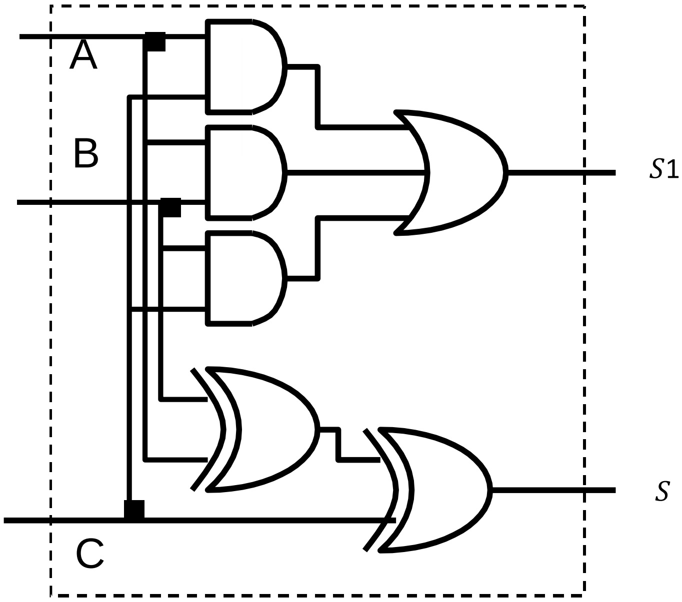
$S = A \oplus B$

$S = A \,.\, B$

VI.1.2. Additionneur complet

On appelle additionneur complet ou FULL-ADDER (FA) le circuit logique qui réalise l'addition de deux bits mais en tenant compte d'une retenue précédente. La table de vérité relative à ce circuit est représentée par la figure suivante :

A	B	C	S1	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



$$S1 = B.C + A.C + A.$$

AB

C	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$S = C \oplus A \oplus B$$

AB

C	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

VI.1.3. Le multiplexeur et le démultiplexeur

a- Le multiplexeur (ou Mux)

C'est un système combinatoire qui réalise la fonction à n variable qui correspondent aux n lignes de sélection.

Les propriétés du multiplexeur

- 2^n entrées ;
- Une seule sortie ;

- n lignes de sélection.

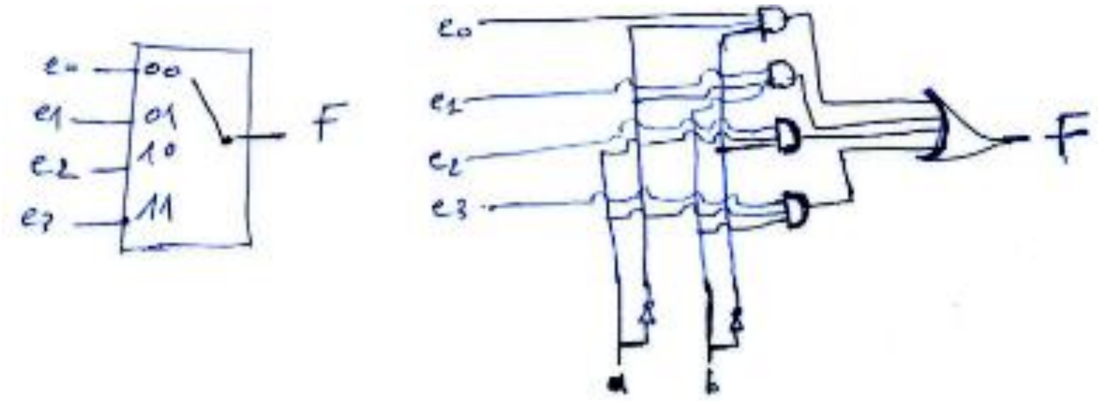
Exemple :

F (a, b) = $e_0\bar{a}\bar{b} + e_1\bar{a}b + e_2a\bar{b} + e_3ab$

a, b Sont appelés les lignes de commande

e_0, e_1, e_2, e_3 Sont appelés les lignes de données

F Est le résultat

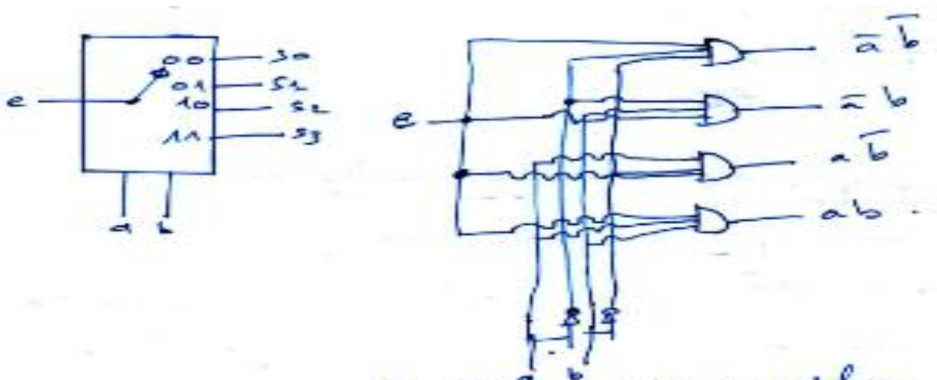


Multiplexeur à deux variables

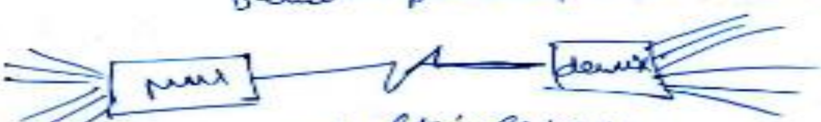
b- Le démultiplexeur (ou Demux)

C'est un circuit combinatoire qui fait une fonction à n variables. Il a constitué par une seul entrée et plusieurs sorties ($2^{n)}$.

- Une seule entrée
- 2^n sorties
- n lignes de sélection



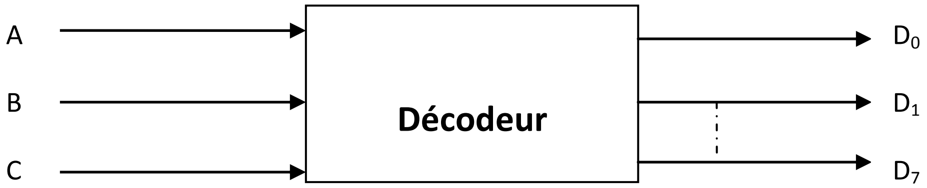
Demultiplexeur à 2 Variables.



Multiplexage.

c- Le décodeur :

Un décodeur est un circuit logique combinatoire qui fait la traduction d'une information binaire présente sur n lignes d'entrée et se présente à sa sortie un seul état actif égal à 1, les autres sorties restent à zéro.

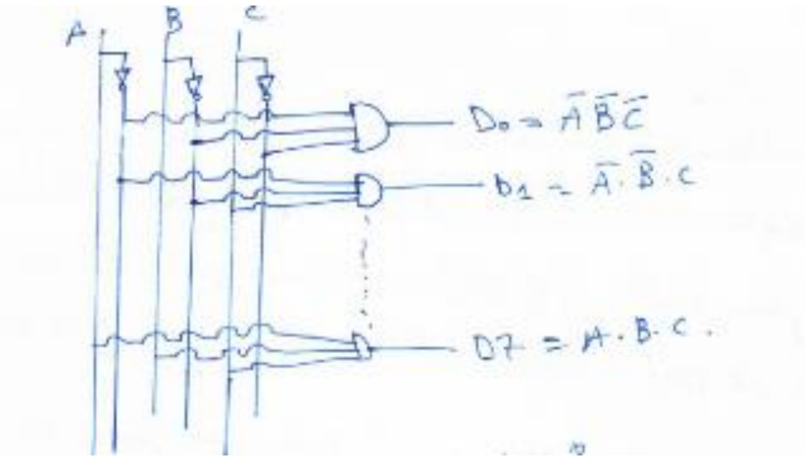


Décodeur 3 vers 8

Table de vérité

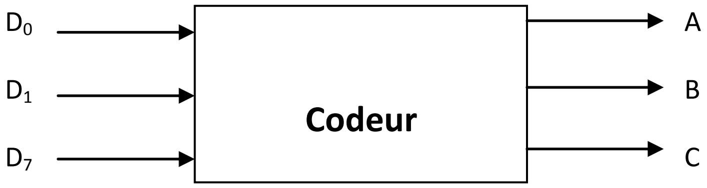
A	B	C	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Logigramme



d- Le codeur (ou l'encodeur)

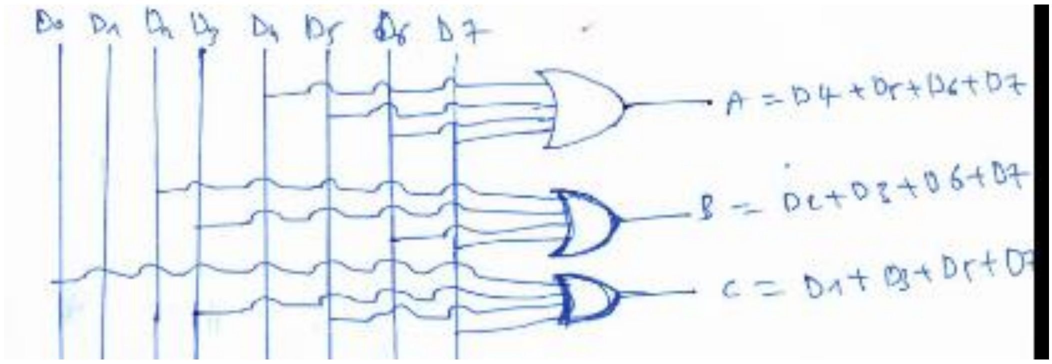
C'est un circuit logique combinatoire son fonctionnement est l'inverse du décodeur (voir la table de vérité suivante)



Codeur à 8 entrées.

D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	A	B	C
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Logigramme



Références et sites web

[1] ***Eric Cariou*** ; '' ***Algèbre de Boole''*** *Université de Pau et des Pays de l'Adour UFR Sciences Pau - Département Informatique* Eric.Cariou@univ-pau.fr. ecariou.perso.univ-pau.fr/cours/archi/cours-2-boole.pdf

[2] ***Michel Riquart*** ***''Logique Combinatoire'' (***www.bac-sen.fr/docs/riquart/logique/logique-combinatoire.pdf)

[3] ***Nadia SOUAG***: logique combinatoire cours et exercices corrigés 'alger 2009

[4] ***L.Djeffal*** : application de l'algèbre de Boole aux circuits combinatoires et séquentiels '' cours et exercices avec solution''. Presses de l'université de batna 1996.

[5] *Menacer Said ; Menacer Mohamed ; Menacer abderahmene* :
Électronique digitale Tome 1 analyse combinatoires et séquentielles aout 1990.

[6] http://www.pdf4free.com ''cours 4 circuits combinatoires''

[7] *M.c Belaid* Les circuits logiques ''combinatoires et séquentiels'', Cours et exercices corrigés Alger-2004.